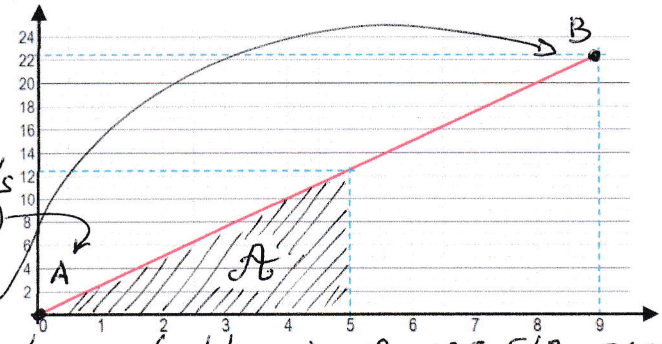
Exercice 1 :
A $t = 0$, une voiture jouet téléguidée est située à $x = 5m$. Sur un intervalle de temps entre 0 et 9s, sa vitesse est donnée par la fonction $v(t) = 2{,}5t$ où v est en m/s. et t est en seconde.
Calculer la position de la voiture à $t = 5s$.



1) Méthode graphique : On trace la courbe représentative de $v(t) = 2{,}5\,t$ pour $0 \leq t \leq 9$:
Analogue à $y = 2{,}5 . x \to f^{\text{ion}}$ linéaire : 2 points suffisent $\longrightarrow v(0) = 2{,}5 \times 0 = 0 \to$ pt $A(0{,}0)$
$\hookrightarrow v(9) = 2{,}5 \times 9 = 22{,}5\ m.s^{-1}$ pt $B(9 ; 22{,}5)$
Pour $t = 5s$, on lit $v(5) \simeq 12{,}5\ m.s^{-1}$
et la position $x(5)$ correspond à l'aire sous la courbe !! $x(5) = \mathcal{A} = 12{,}5 \times 5/2 = 31{,}25\ m$
31,25 m auxquels il faut ajouter $x = 5m$ au départ soit 36,25 m

2) Calcul :
$$x(5) = \int_0^5 v(t).dt + x_0 = \int_0^5 2{,}5.t\,dt + x_0 = \left[2{,}5.\frac{t^2}{2}\right]_0^5 + x_0 = \frac{2{,}5 \times 5^2}{2} + 5 = 36{,}25\ m \quad (x_0 = 5\ m)$$

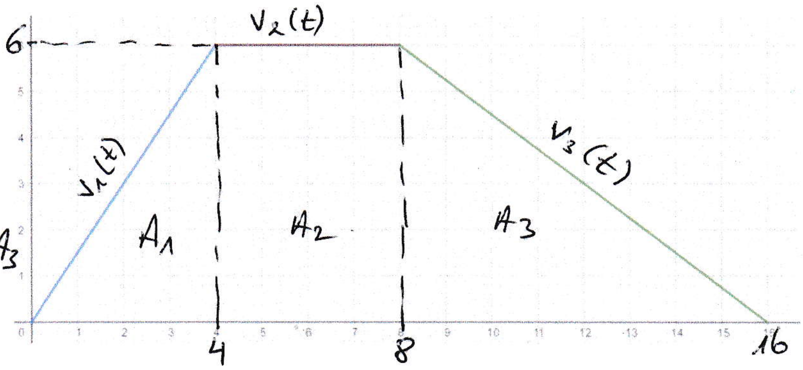
Exercice 2 : L'accélération d'une particule est donnée par l'équation $a(t) = 5t$. Sachant que $x_0 = 7m$ est , calculez :

1) L'accélération à 6s. $a(6) = 5 \times 6 = 30\ m.s^{-2}$

2) La vitesse à 6s. $v(6) = \int_0^6 a(t).dt + v_0 = \int_0^6 5t\,dt + \emptyset = \left[5.\frac{t^2}{2}\right]_0^6 = \frac{5 \times 6^2}{2} = 90\ m.s^{-1}$

3) La position à 6s $x(6) = \int_0^6 v(t).dt + x_0 = \int_0^6 \frac{5.t^2}{2}.dt + x_0 = \left[\frac{5}{2}.\frac{t^3}{3}\right]_0^6 + 7 = \frac{5 \times 6^3}{6} + 7 = 187\ m$

Exercice 3 : La courbe ci-contre représente les variations de la vitesse d'une voiture téléguidée en fonction du temps, sachant que la position $x_0 = 0$.



1) Déterminer graphiquement la position de cette voiture à l'instant $t = 16s$.

$x(16)$ = Aire sous la courbe : $A = A_1 + A_2 + A_3$
$$x(16) = \frac{4 \times 6}{2} + 4 \times 6 + \frac{8 \times 6}{2}$$
$$= 12 + 24 + 24 = 60\ m$$

2) Retrouvez ce résultat par le calcul, sachant que : $v(t) = \begin{cases} 1{,}5t & si\ 0 \leq t \leq 4 \\ 6 & si\ 4 \leq t \leq 8 \\ -0{,}75t + 12 & si\ 8 \leq t \leq 16 \end{cases}$

$$x(16) = \int_0^4 v_1(t)\,dt + \int_4^8 v_2(t).dt + \int_8^{16} v_3(t).\,dt + x_0 \quad (x_0 = 0)$$
$$= \int_0^4 1{,}5t.dt + \int_4^8 6.\,dt + \int_8^{16} (-0{,}75t + 12).\,dt$$
$$= \left[1{,}5.\frac{t^2}{2}\right]_0^4 + \left[6.t\right]_4^8 + \left[-0{,}75.\frac{t^2}{2} + 12.t\right]_8^{16}$$
$$= \frac{1{,}5 \times 4^2}{2} + 6 \times 8 - 6 \times 4 + \left(\frac{-0{,}75 \times 16^2}{2} + 12 \times 16\right) - \left(\frac{-0{,}75 \times 8^2}{2} + 12 \times 8\right)$$
$$= 12 + 48 - \cancel{24} + \underbrace{(-96 + 192)}_{+96} - (-\cancel{24} + \cancel{96}) = 12 + 48 = 60\ m$$

CQFD