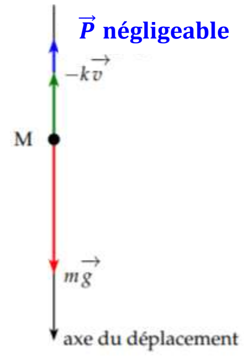
Application 1 : Chute libre :

On cherche à déterminer l'expression de la vitesse d'un corps dans l'air, c'est à dire dans notre environnement habituel. Lorsqu'on lache un corps M de masse m dans cet environnement, il est soumis à trois forces :

- Son poids : $m\vec{g}$,
- Une force de frottement : $-k\vec{v}$ qui s'oppose au mouvement et qui est proportionnelle à la vitesse k dépend de la forme du corps et de la composition de l'atmosphère.
- La poussée d'Archimède : $\vec{P}$ que l'on négligera en raison de sa faible influence.



On oriente l'axe du déplacement vers le

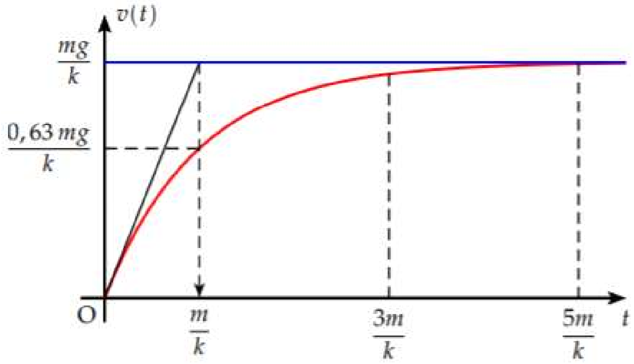
D'après le second principe de la dynamique on a : $m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{g} - k\vec{v}$

En projetant sur l'axe du mouvement et en remarquant que l'accélération est la dérivée de la vitesse, on obtient :

$$m\frac{dv}{dt} = m\vec{g} - k\vec{v} \iff \frac{dv}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v} \iff \frac{dv}{dt} = \vec{g} - \frac{k}{m}\vec{v}$$

La solution de l'équation homogène est : $Ce^{-\frac{k}{m}t}$ avec C une constante qui dépend des conditions initiales.

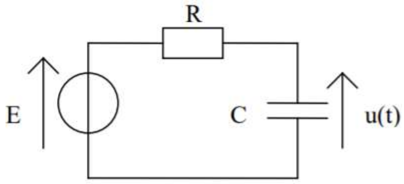
- Une solution particulière est : $\frac{b}{a_0} = \frac{mg}{k}$
- La solution générale est : $v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}$ or $v(0) = 0$ donc : $v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$



Remarque : Un corps lâché en chute libre possède une vitesse limite : $v(\infty) = \frac{mg}{k}$

Application 1 : Circuit électrique (recharge du condensateur)

$u(t)$ est la tension électrique aux bornes d'un condensateur C alimenté à travers une résistance R sous une tension constante E :



Les lois de l'Electricité indiquent que : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$

Cherchons maintenant la loi d'évolution de la tension électrique u(t) :

- Recherche de la solution de l'équation homogène associée : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = 0$

  La solution de cette équation est de la forme : $u(t)_{Homogène} = Ce^{-\frac{1}{RC}t}$

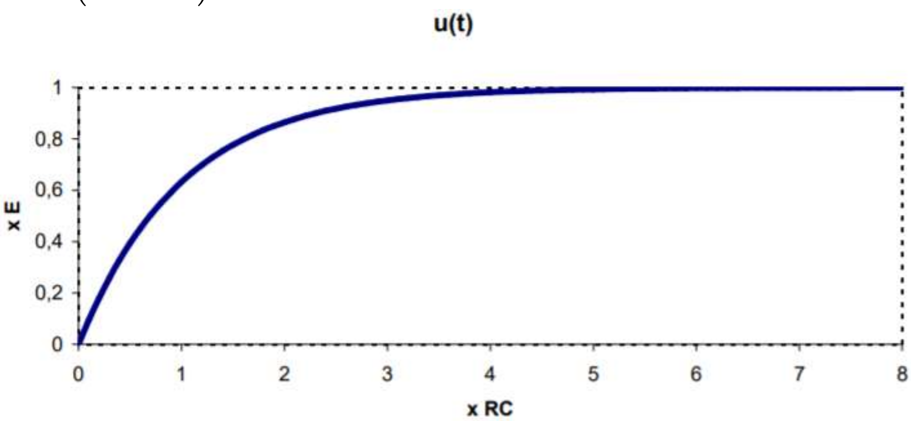
  avec C une constante qui dépend des conditions initiales.

- Recherche de la solution particulière de l'équation générale : $RC\frac{du(t)}{dt} + u(t) = E$
  Une solution particulière de cette équation : : $u(t)_{Particulière} = E$

- Solution générale : $u(t) = u(t)_{Homogène} + u(t)_{Particulière} = Ce^{-\frac{1}{RC}t} + E$

En prenant comme condition initiale $u(t = 0)\ = 0V$ (condensateur déchargé) alors : $C = -E$

Finalement : $u(t) = E\left(1 - e^{-\frac{1}{RC}t}\right)$



Remarques :

$\tau = RC$ est la **constante de temps** du circuit électrique.
Après 3τ, le condensateur est chargé à 95 %.

La solution particulière correspond au régime permanent : $u(t \to \infty) = E$ (le condensateur est chargé à 100 %).

La solution de l'équation homogène correspond au régime transitoire : $u(t \to \infty)_{Homogène} = -E\ e^{-\frac{1}{RC}t}$.
On vérifie que le régime transitoire disparaît : $u(t \to \infty)_{Homogène} \to 0$ V