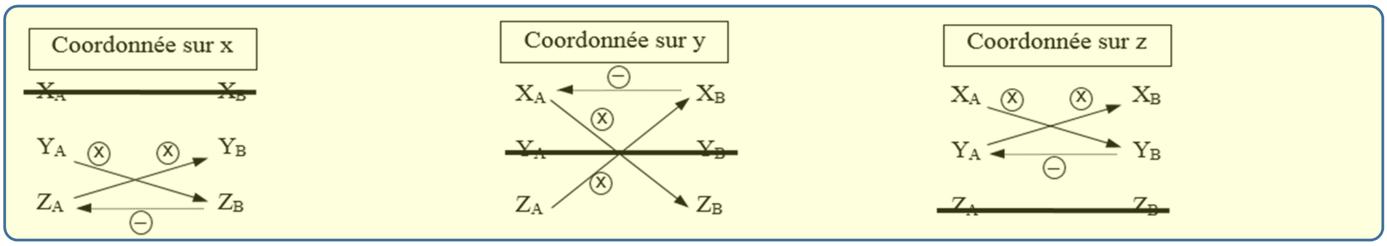
RAPPELS DE MATHS

Produit vectoriel en coordonnées :

Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

$$\vec{A} = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \quad \vec{B} = \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} \quad \text{alors, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} Y_A.Z_B - Y_B.Z_A \\ Z_A.X_B - Z_B.X_A \\ X_A.Y_B - X_B.Y_A \end{vmatrix}$$

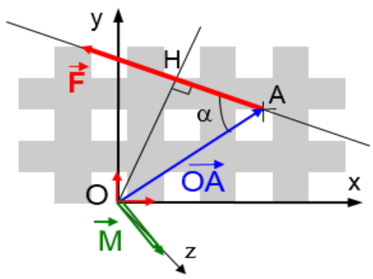
Pour obtenir la coordonnée «$Y_A.Z_B$ - $Y_B.Z_A$ » sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.



Exemple :

Soit $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$ ainsi que M = II $\vec{M}$ II, norme du vecteur $\vec{M}$:

$$\vec{OA} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \vec{F} = \begin{vmatrix} -5 \\ +2 \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{alors, } \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3x0-0x(2) \\ 0x(-5)-4x0 \\ 4x2-3x(-5) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 23 \end{vmatrix}$$



Remarques :
- ✓ $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ étant dans le plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$), $\vec{M}$ est sur l'axe z perpendiculaire au plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$).
- ✓ II $\vec{M}$ II = M = OA . F . sin α avec OA sin α = OH soit : M = F x OH

RAPPELS DE MECA

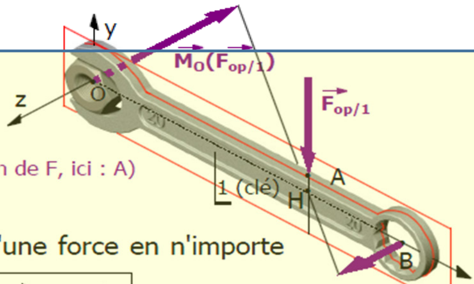
6.3. **Vecteur moment :**

Le calcul du vecteur moment permet de déterminer n'importe quel moment de n'importe quelle force dans le plan ou dans l'espace et ce, avec précision et à coup sûr. Il nécessite simplement la connaissance :
- des coordonnées des points (en m)
- des coordonnées des forces (en N)

Le « vecteur moment au point O de la force F appliquée en A » est défini tel que :

$$\boxed{\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}}$$

Point sur le support de F (en général, point d'application de F, ici : A)



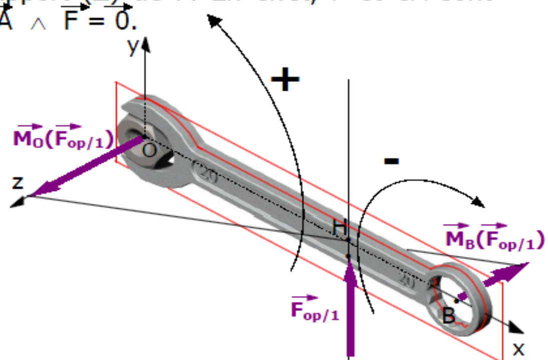
Pour les besoins de l'étude, on peut être amené à calculer le moment d'une force en n'importe quel point de l'espace ! Ainsi, on définirait de même :

$$\boxed{\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}}$$

remarque - vecteur moment nul (fig. 1):

$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ quelque soit le point C appartenant au support (Δ) de $\vec{F}$. En effet, $\vec{F}$ et $\vec{CA}$ sont colinéaires. Notamment pour le point d'application de $\vec{F}$: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

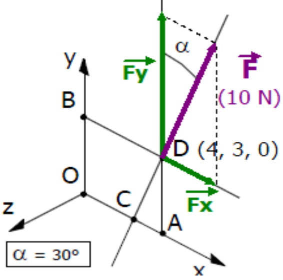
Le moment d'une force en un point de son support est toujours nul.



remarque – sens du vecteur moment :

Le sens du vecteur moment est cohérent avec la convention de signe du moment scalaire : ci-contre $M_O(\vec{F}_{op/1}) > 0$ et $M_B(\vec{F}_{op/1}) < 0$

vecteur moment - exemples :



Déterminer $\vec{M}_O(\vec{F})$, $\vec{M}_A(\vec{F})$, $\vec{M}_B(\vec{F})$ et $\vec{M}_C(\vec{F})$

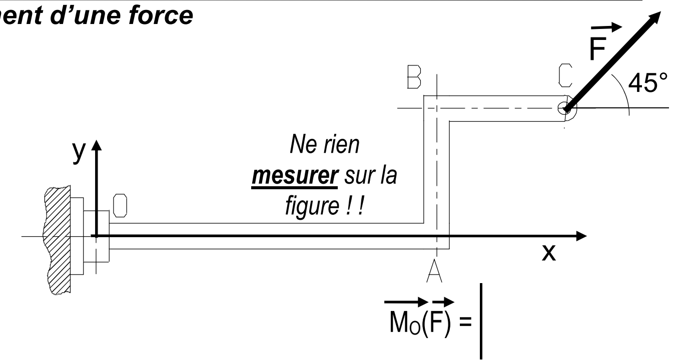
- $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 20{,}64 \end{vmatrix}$
- $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \end{vmatrix}$
- $\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{BD} \wedge \vec{F} = \vec{0}$
- $\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{vmatrix} \approx \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 34{,}64 \end{vmatrix}$

Calcul du vecteur moment d'une force

EXERCICE 1

OA = 2 m   AB = BC = 0.5 m , F = ‖ F ‖ =300 N

Calculer le vecteur Moment en O de F .



Relation littérale : $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ = ___________

conditions : ______________________________________

$\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$ =

Calculer $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$ et justifier le résultat en une phrase.

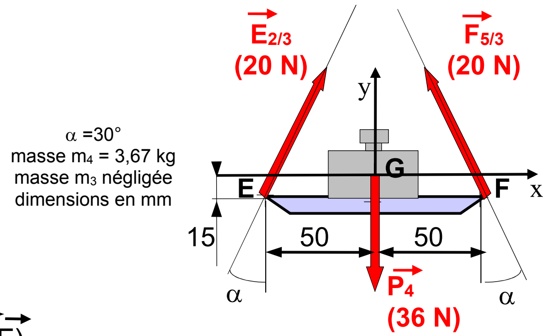
$\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$ =

Justification :

EXERCICE 2

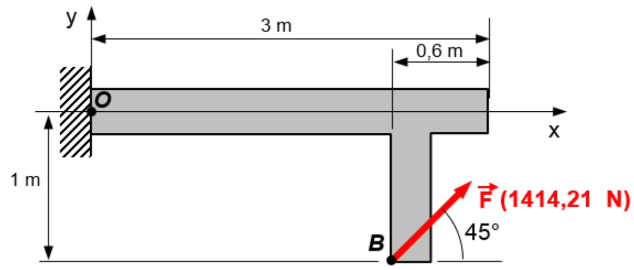
2 - Soit une masse (4) posée sur un plateau (3) ci-contre :

Calculer $\overrightarrow{M_E}(\vec{F}_{5/3})$



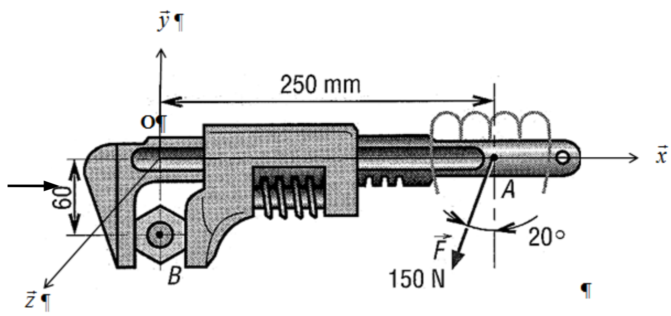
EXERCICE 3

- Calculer $\overrightarrow{M_O}(\vec{F})$.



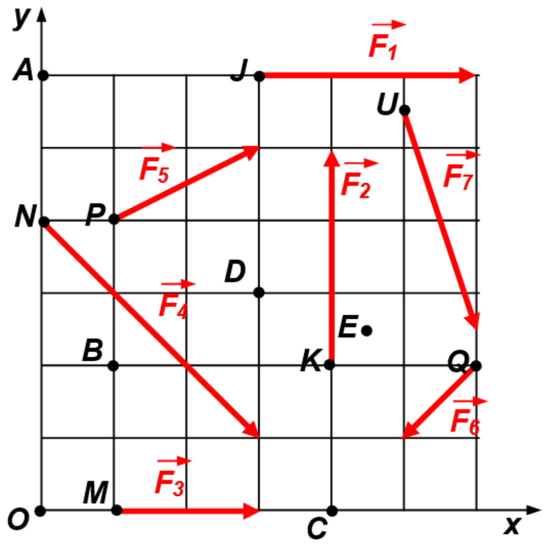
EXERCICE 4

Calculer $\overrightarrow{M_B}(\vec{F})$.



EXERCICE 5

Calculer le vecteur moment de chaque force en chaque point (7 forces x 13 points = 91 moments!!)



$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_1)$ =

$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}_2)$ =

•••

$\overrightarrow{M_B}(\vec{F}_3)$ =

$\overrightarrow{M_B}(\vec{F}_4)$ =

•••

$\overrightarrow{M_C}(\vec{F}_5)$ =

$\overrightarrow{M_C}(\vec{F}_6)$ =

•••

EXERCICE 1

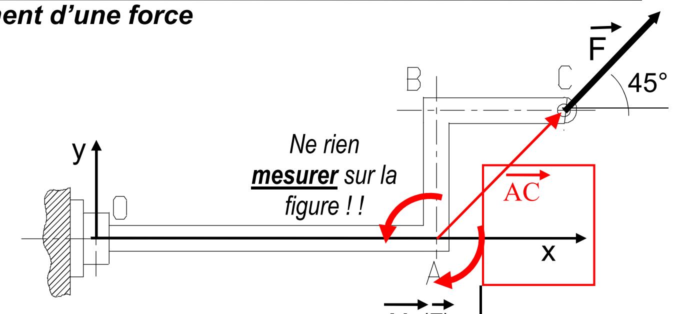
OA = 2 m AB = BC = 0.5 m , F = ll F ll =300 N

Calculer le vecteur Moment en O de F .

Relation littérale : $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}$

conditions :

$$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \left|\begin{array}{l} 2,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 300 \cdot \cos 45° \\ 300 \cdot \sin 45° \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 2,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 212 \\ 212 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 2,5 \times 212 - 0,5 \times 212 = 2 \times 212 = 424 \text{ N.m} \end{array}\right.$$



$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) =$

Calculer $\overrightarrow{M_A}(\vec{F})$ et justifier le résultat en une phrase.

$$\overrightarrow{M_A}(\vec{F}) = \overrightarrow{AC} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l} 0,5 \\ 0,5 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 212 \\ 212 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0,5 \times 212 - 0,5 \times 212 = 0 \end{array}\right.$$

Justification : le PV de 2 vecteurs colinéaires est nul, le moment d'une force en son point d'application est nul

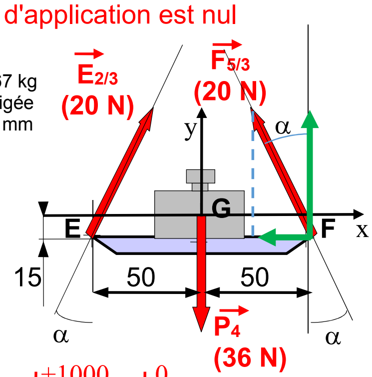
EXERCICE 2

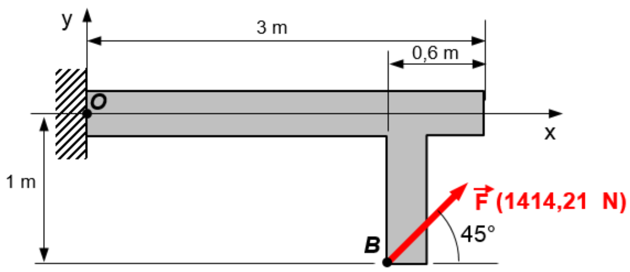
2 - Soit une masse (4) posée sur un plateau (3) ci-contre :

$$\left|\begin{array}{l} -20 \sin 30° \\ +20 \cos 30° \\ 0 \end{array}\right.$$

Calculer $\overrightarrow{M_E}(\vec{F}_{5/3}) = \overrightarrow{EF} \wedge \vec{F}_{5/3} = \left|\begin{array}{l} 100 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -10 \\ +17,32 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 100 \times 17,32 = 1732 \text{ Nm} \end{array}\right.$

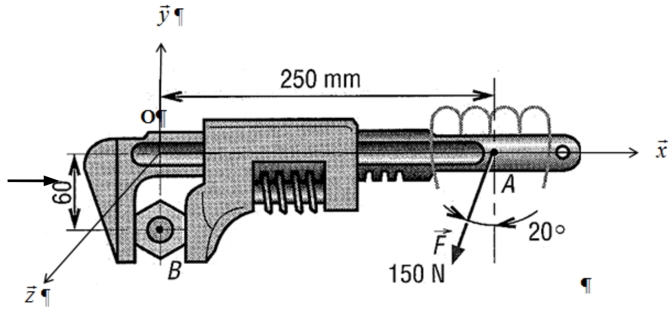
α =30°
masse m_4 = 3,67 kg
masse m_3 négligée
dimensions en mm





EXERCICE 3

Calculer $\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OB} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l} 2,4 \\ -1 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} +1000 \\ +1000 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +3400 \text{ Nm} \end{array}\right.$



EXERCICE 4

Calculer $\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l} 250 \\ 60 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -51,3 \\ -149,5 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -32.160 \text{ N.mm} \end{array}\right.$

EXERCICE 5

Calculer le vecteur moment de chaque force en chaque point (7 forces x 13 points = 91 moments!!)

$\overrightarrow{M_O}(\vec{F_1}) = \overrightarrow{OJ} \wedge \vec{F_1} = \left|\begin{array}{l} 3 \\ 6 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 300 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -1800 \text{ N.m} \end{array}\right.$

$\overrightarrow{M_O}(\vec{F_2}) = \overrightarrow{OK} \wedge \vec{F_2} = \left|\begin{array}{l} 4 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 0 \\ 300 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +1200 \text{ N.m} \end{array}\right.$

•••

$\overrightarrow{M_B}(\vec{F_3}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F_3} = \left|\begin{array}{l} 0 \\ -2 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 200 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ +400 \text{ N.m} \end{array}\right.$

$\overrightarrow{M_B}(\vec{F_4}) = \overrightarrow{BN} \wedge \vec{F_4} = \left|\begin{array}{l} -1 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 300 \\ -300 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -300 \text{ N.m} \end{array}\right.$

•••

$\overrightarrow{M_C}(\vec{F_5}) = \overrightarrow{CP} \wedge \vec{F_5} = \left|\begin{array}{l} -3 \\ 4 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} 200 \\ 100 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ -1100 \text{ N.m} \end{array}\right.$

$\overrightarrow{M_C}(\vec{F_6}) = \overrightarrow{CQ} \wedge \vec{F_6} = \left|\begin{array}{l} 2 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -100 \\ -100 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.$

$\overrightarrow{CQ}$ et $\vec{F_6}$ colinéaire

•••