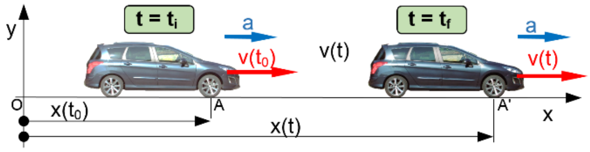
CINEMATIQUE ANALYTIQUE

Équations du mouvement

Faisons simple :
Il s'agira, lors des évaluations (contrôle continu -second semestre), d'être capable de déterminer la position, la vitesse et l'accélération d'un solide à tout instant, <u>à partir de son graphe des vitesses</u>.
Il y a deux types de mouvement : la translation rectiligne et la rotation. Commençons par la translation rectiligne.

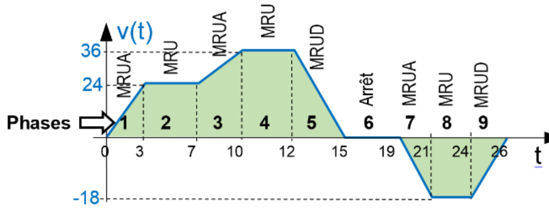


Le graphe des vitesses ci-contre illustre toutes les phases* possibles :

- Arrêt
- MRU (Mouvement Rectiligne Uniforme)
- MRUA (Mouvement Rectiligne Uniformément accéléré)
- MRUD (Mouvement Rectiligne Uniformément décéléré)
- (Marche avant / Marche arrière)

MRUA et MRUD : MRUV : Mouvement Rectiligne Uniformément Varié

*: il y a changement de phase lorsqu'il y a changement de nature du mouvement



La position **x**, la vitesse **v** et l'accélération **a** sont données à tout instant **t** par les équations de mouvement ci-contre, spécifiques à chaque phase.
Notez bien les unités utilisées, et en outre, elles peuvent vous servir pour vérifier vos résultats.

MRU

$a(t) = a = 0$	m/s^2
$v(t) = v_0$ = constante	m/s
$x(t) = v_0 \cdot (t-t_0) + x_0$	m

Si $t_0=0$, $x_0=0$,

$a = 0$	m/s^2
$v(t) = v_0$	m/s
$x(t) = v_0 \cdot t$	m

MRUA (a>0) ou MRUD (a<0)

$a(t) = a$ = constante	m/s^2
$v(t) = a.(t-t_0) + v_0$	m/s
$x(t) = 0{,}5\, a.(t-t_0)^2 + v_0.(t-t_0) + x_0$	m

Si $t_0=0$, $x_0=0$, $v_0=0$

a = constante	m/s^2
$v(t) = a.\,t$	m/s
$x(t) = 0{,}5\, a.t^2$	m

Sur un MRUA, on utilisera également le calcul rapide de l'accélération :

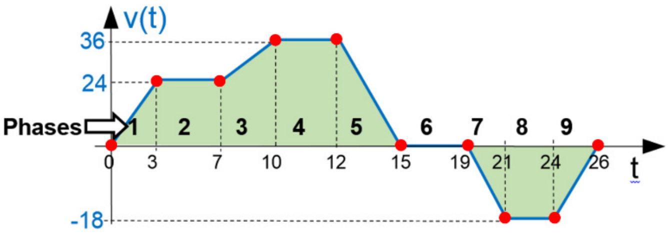
$$\boxed{a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}}$$

(a en $m.s^{-2}$; $v(t)$, v_0 en $m.s^{-1}$; t, t_0 en s)

1) <u>Les vitesses v(t) : Le plus facile, lecture sur le graphe</u> :

1.1) Aux limites de phase, lecture directe :

- à t = 0 s : v(0) = 0
- à t = 3 s : v(3) = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 7 s : v(7) = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 10 s : v(10) = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 12 s : v(12) = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 15 s : v(15) = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 19 s : v(19) = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 21 s : v(21) = -18 $m.s^{-1}$
- à t = 24 s : v(24) = -18 $m.s^{-1}$
- à t = 26 s : v(26) = 0 $m.s^{-1}$

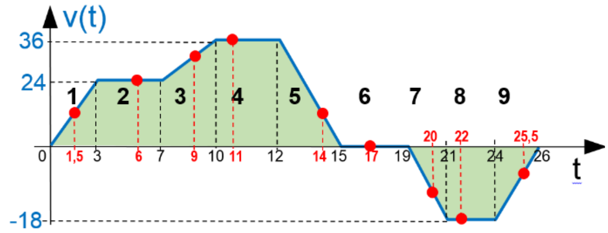


1.2) En cours de phase, lecture directe (MRU) ou ...

⇨ MRU : lecture directe

- à t = 6 s : $v_2(6)$ = 24 $m.s^{-1}$
- à t = 11 s : $v_4(11)$ = 36 $m.s^{-1}$
- à t = 17 s : $v_6(17)$ = 0 $m.s^{-1}$
- à t = 22 s : $v_4(22)$ = -18 $m.s^{-1}$

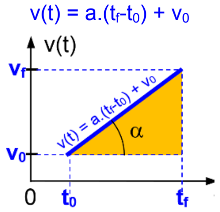
⇨ MRUV : la vitesse est proportionnelle à l'accélération qu'il faut calculer.
à t = 1,5 s, t = 9 s, t = 14 s, ... voyons comment calculer l'accélération.



2) <u>Les accélérations a, variations (linéaires) de la vitesse</u>

Mathématiquement, l'accélération est le taux de variation de la fonction vitesse soit, sa dérivée:

$v(t) = a.(t_f-t_0) + v_0$

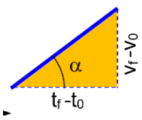


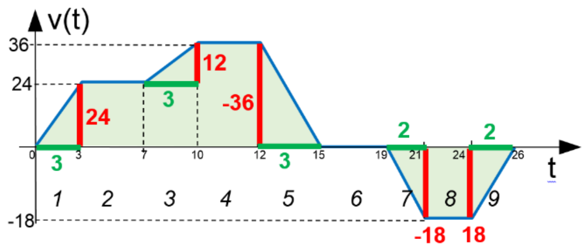
$$\boxed{a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0}}$$

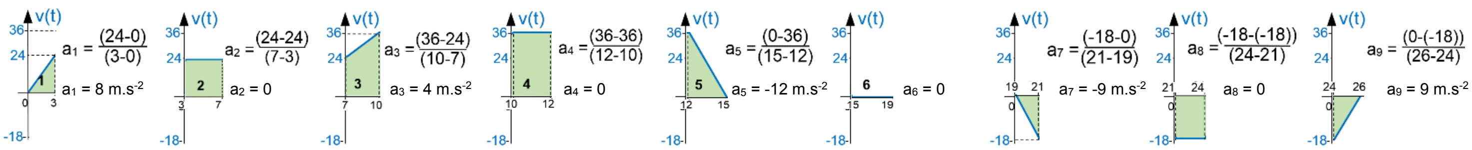
(a en $m.s^{-2}$; $v(t)$, v_0 en $m.s^{-1}$; t, t_0 en s)

a = coef. directeur :

$a = \tan\alpha = (v_f-v_0) / (t_f-t_0)$







$a_1 = \frac{(24-0)}{(3-0)}$; $a_1 = 8\ m.s^{-2}$

$a_2 = \frac{(24-24)}{(7-3)}$; $a_2 = 0$

$a_3 = \frac{(36-24)}{(10-7)}$; $a_3 = 4\ m.s^{-2}$

$a_4 = \frac{(36-36)}{(12-10)}$; $a_4 = 0$

$a_5 = \frac{(0-36)}{(15-12)}$; $a_5 = -12\ m.s^{-2}$

$a_6 = 0$

$a_7 = \frac{(-18-0)}{(21-19)}$; $a_7 = -9\ m.s^{-2}$

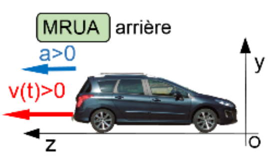
$a_8 = \frac{(-18-(-18))}{(24-21)}$; $a_8 = 0$

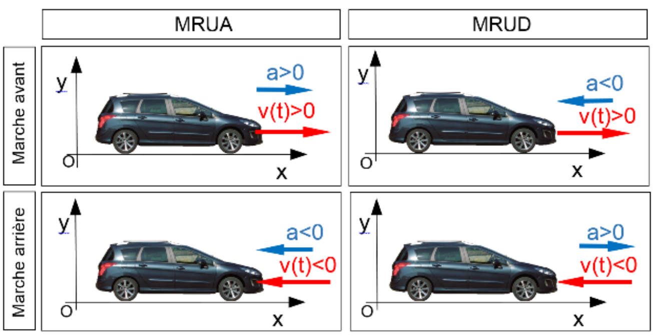
$a_9 = \frac{(0-(-18))}{(26-24)}$; $a_9 = 9\ m.s^{-2}$

<u>Remarque 1</u> :
- MRUA ⇨ a>0
- MRUD ⇨ a<0

<u>Remarque 2</u> :
- a_7 <0 ⇨MRUA marche arrière
- a_9 >0 ⇨MRUD marche avant

<u>Remarque 3</u> : • Attention au repère !

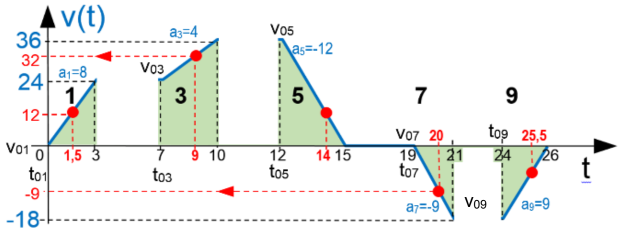




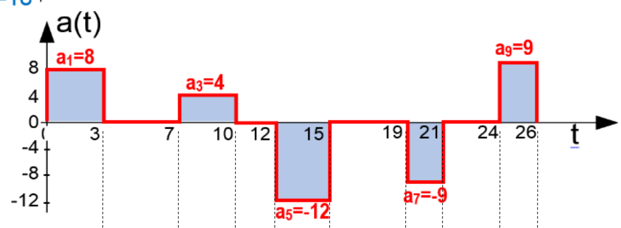
On peut ainsi calculer v(t=1,5), v(t=9), v(t=14), ...

$$\boxed{\overset{m.s^{-1}}{v(t)} = \underset{m.s^{-2}}{a}.(\underset{s}{t} - t_0) + \underset{m.s^{-1}}{v_0}}$$

- à t = 1,5 s : $v_1(1,5) = a_1.(1,5 - t_{01}) + v_{01} = 8.(1,5-0) + 0 = 12\ m.s^{-1}$
- à t = 9 s : $v_3(9) = a_3.(9 - t_{03}) + v_{03} = 4.(9-7) + 24 = 32\ m.s^{-1}$
- à t = 14 s : $v_5(14) = a_5.(14 - t_{05}) + v_{05} = -12.(14-12) + 36 = 12\ m.s^{-1}$
- à t = 20 s : $v_7(20) = a_7.(20 - t_{07}) + v_{07} = -9.(20-19) + 0 = -9\ m.s^{-1}$
- à t = 25,5 s : $v_9(25,5) = a_9.(25,5 - t_{09}) + v_{09} = +9.(25,5-24) - 18 = -4,5\ m.s^{-1}$



On peut éventuellement tracer le graphe des accélérations :



3) Les positions x(t)

Mathématiquement, de même que a(t) est la dérivée de la vitesse, v(t) est la dérivée de la position x(t). V(t) représente bien la variation de la position par rapport au temps (m/s) !!
Par conséquent, x(t) est une primitive de v(t) bornée entre l'instant (t_0) de départ et l'instant final (t_f)
soit :

$v(t) = \dfrac{dx(t)}{dt}$ ⇨ : $\boxed{x(t) = \int_{t_0}^{t_f} v(t).dt + x_0}$ Pour une phase donnée ($t_0 < t < t_f$)

la position x(t) correspond à l'aire sous la courbe v(t) entre les abscisses 0 et t_f.

$x_1(t) = \int_0^3 v_1(t).dt + x_{01} = A_1 + x_{01} = (3-0).24 / 2 + 0 = 36\ m$

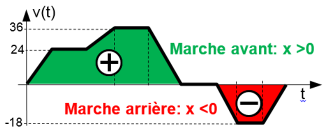
$x_2(t) = \int_3^7 v_2(t).dt + x_{02} = A_2 + x_{02} = (7-3).24 + 36 = 132\ m$

$x_3(t) = \int_7^{10} v_3(t).dt + x_{03} = A_3 + x_{03} = (10-7).24 + (10-7).(36-24) / 2 + 132 = 222\ m$

$x_4(t) = \int_{10}^{12} v_4(t).dt + x_{04} = A_4 + x_{04} = (12-10).36 + 222 = 294\ m$

$x_5(t) = \int_{12}^{15} v_5(t).dt + x_{05} = A_5 + x_{05} = (15-12).36 / 2 + 294 = 348\ m$

$x_6(t) = \int_{15}^{19} v_6(t).dt + x_{06} = A_6 + x_{06} = 0 + 348 = 348\ m$

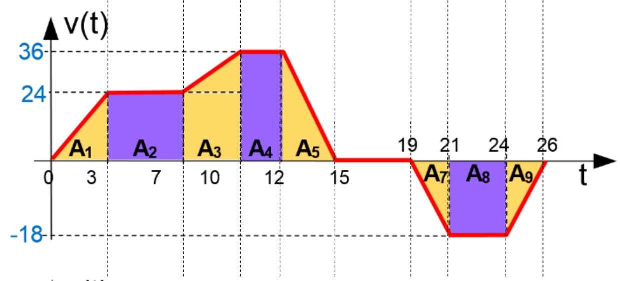


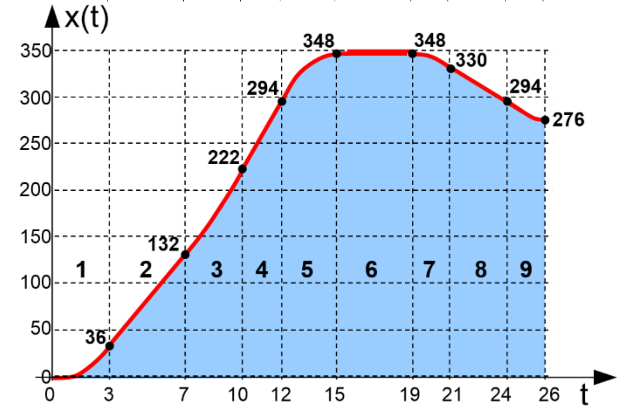
$x_7(t) = \int_{19}^{21} v_7(t).dt + x_{07} = A_7 + x_{07} = (21-19).(-18)/2 + 348 = 330\ m$

$x_8(t) = \int_{21}^{24} v_8(t).dt + x_{08} = A_8 + x_{08} = (24-21).(-18) + 330 = 294\ m$

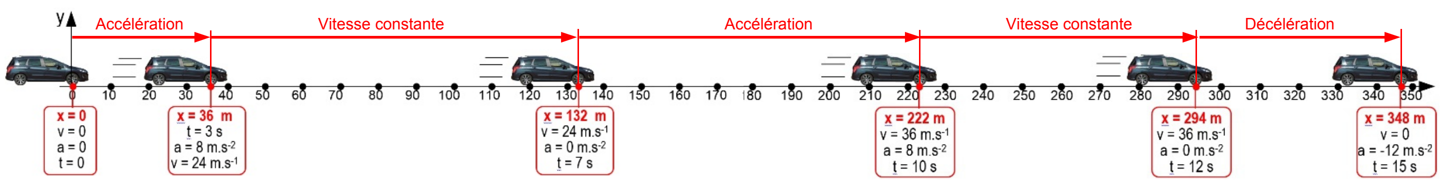
$x_9(t) = \int_{24}^{26} v_9(t).dt + x_{09} = A_9 + x_{09} = (26-24).(-18)/2 + 294 = 276\ m$

Rq : phase 1 ⇨ $x(t) = 0,5.a.(t-t_0)^2 = 0,5x8x(3-0)^2 = 36m$ $\boxed{\underset{m}{x(t)} = \frac{1}{2}\,\overset{m.s^{-2}}{a}.(\underset{s}{t - t_0})^2}$





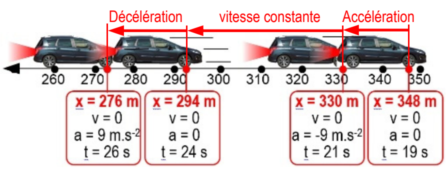
Aperçu du mouvement dans son ensemble :



Vitesse moyenne :
La vitesse moyenne se détermine par :

v = d / t soit, suivant les phases étudiées :

$$\boxed{\underset{m.s^{-1}}{V_{moy}} = \frac{\overset{m}{x(t) - x_0}}{\underset{s}{t - t_0}}}$$



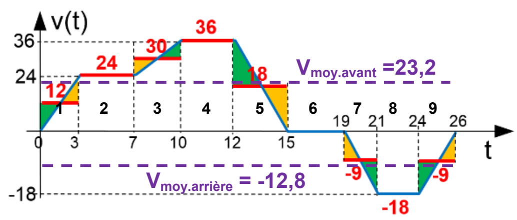
En marche avant, phases 1 à 5 : $v_{moy} = [x(15) - x(0)] / [15 - 0] = 348/15 = 23,2\ m.s^{-1}$
En marche arrière, phases 7 à 9 : $v_{moy} = [x(26) - x(19)] / [26 - 19] = [260-348] / 7 = -12,57\ m.s^{-1}$

Rq :On peut calculer la moyenne pondérée des vitesses moyennes ($\overline{v}$)pour n phases :

$\overline{V} = V_{moy} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\overline{V_i}\,.\,t_i}{t_f - t_0}$ soit en marche avant : $\overline{V}_{1\text{-}5} = \dfrac{\overline{V_1}.t_1 + \overline{V_2}.t_2 + \overline{V_3}.t_3 + \overline{V_4}.t_4 + \overline{V_5}.t_5}{t_f - t_0}$

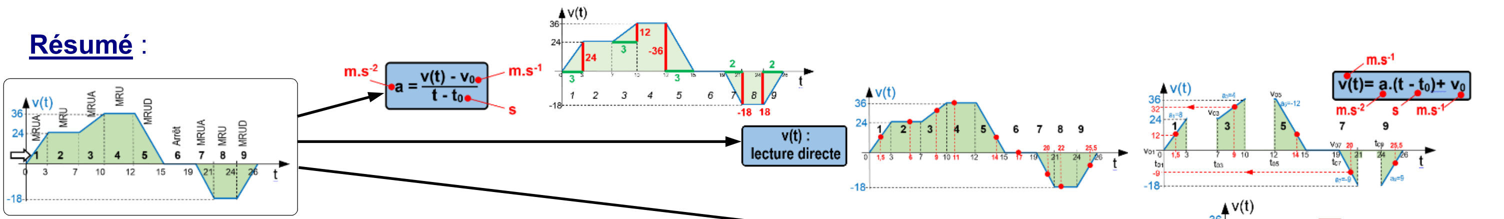
$= \dfrac{12x3+24x4+30x3+36x2+18x3}{15} = 23,2\ m.s^{-1}$

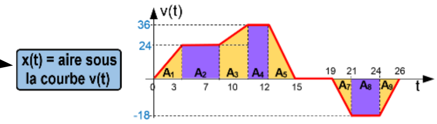
en marche arrière : $\overline{V}_{moy7\text{-}8} = \dfrac{\overline{V_7}.t_7 + \overline{V_8}.t_8 + \overline{V_9}.t_9}{t_f - t_0}$ $\dfrac{-9x2-18x3-9x2}{26-19}$ $= -12,8\ m.s^{-1}$



On notera que $\overline{V_i}.t_i$ = x_i aire sous la courbe.
Ex: phase 1⇨12 x 3 = 24 x 3 / 2

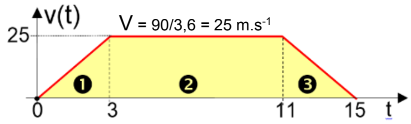
Résumé :





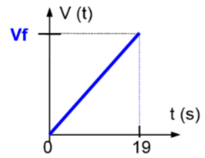
Construire le graphe des vitesses, exemples :

Un véhicule accélère de 0 à 90 km.h^{-1} en 3 secondes, puis roule à vitesse constante pendant 8 secondes puis freine et s'arrête en 4 secondes. L'accélération comme le freinage sont uniformes.

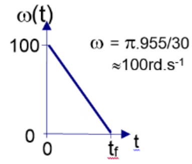


$$V_{m.s^{-1}} = \frac{V_{km.h^{-1}}}{3,6}$$

Une formule 1 effectue un 1000 m, départ arrêté, en 19 secondes dans un mouvement supposé rectiligne uniformément varié.



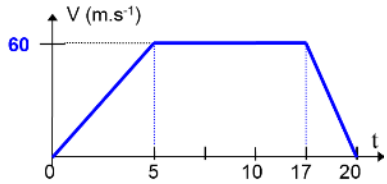
Une poulie motrice qui tournait à la fréquence de 955 tr/min s'arrête en 20 s dans un mouvement uniformément décéléré.



CINEMATIQUE ANALYTIQUE

Exercices

Exercice n°1 : ORNI (Objet Roulant Non Identifié)



Le graphe des vitesses proposé donne les trois phases du départ-arrêté d'un véhicule. Conditions initiales : à $t_0 = 0$, $x_0 = 0$ et $v_0 = 0$.

***Déterminer** les accélérations et les positions à la fin de chacune des 3 phases. Vitesse moyenne? De quel type de véhicule peut-il s'agir ?*

1) Accélérations :

$a_1=(60-0)/(5-0)=12$ m.s^{-2}

$a_2= 0$

$a_3=(0-60)/(20-17)=-20$ m.s^{-2}

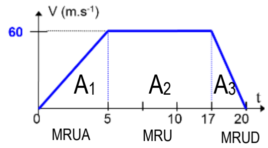
$$\underset{m.s^{-2}}{a} = \frac{\underset{m.s^{-1}}{v(t) - v_0}}{\underset{s}{t - t_0}}$$

2) Positions :

$$x_1(5) = \int_0^5 v_1(t).dt + v_{01} = A_1 + v_{01} = (5-0).60 /2 + 0 = 150 \text{ m}$$

$$x_2(17) = \int_5^{17} v_2(t).dt + v_{02} = A_2 + v_{02} = (17-5).60 + 150 = 870 \text{ m}$$

$$x_3(20) = \int_{17}^{20} v_3(t).dt + v_{03} = A_3 + v_{03} = (20-17).60 /2 + 870 = 960 \text{ m}$$



3) Vitesse moyenne :

$$\underset{m.s^{-1}}{V_{moy}} = \frac{\underset{m}{x(t) - x_0}}{\underset{s}{t - t_0}}$$

$V_{1\text{-}3} = (9\overline{6}0 - 0) / (20-0) = 48$ m.s^{-1}

3) Véhicule ?

60 m.s^{-1} = 216 km.h^{-1}. Le véhicule passe de 0 à 216 km.h^{-1} en 5 secondes. Et il accélère davantage qu'un corps en chute libre: C'est une formule 1.

Exercice N°2 : Thrust SSC (SuperSonic Car)

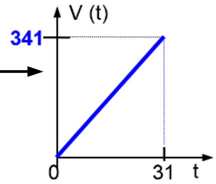
***Thrust SSC** est un véhicule terrestre supersonique, détenteur du record absolu de vitesse au sol avec 1 227,985 km/h atteints en 31 secondes. Il est équipé de deux turboréacteurs de 52.000 chevaux chacun.*
Si le mouvement est supposé rectiligne uniformément varié, déterminer la distance parcourue pour atteindre cette vitesse.

1) On trace le graphe des vitesses à partir de l'énoncé

$$x(31) = \int_0^{31} v(t).dt + x_0 = A + x_0 = (31-0) \times 341,1 /2 + 0 = 5.287 \text{ m}$$

ou bien $x(31) = 0,5 . a . 31^2$ avec $a = (341,1-0) /(31-0) = 11$ m.s^{-2}, soit

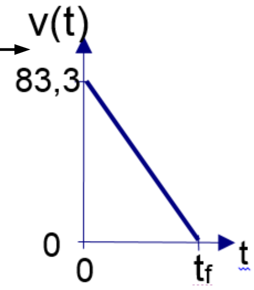
$x(31) = 0,5 . 11 . 31^2 = 5287$ m



Exercice n°3 : Atterrissage d'un Avion

Pour atterrir, un avion arrive en bout de piste à la vitesse de 300 km/h. La longueur d'atterrissage est de 1200 m et le mouvement est supposé rectiligne uniformément décéléré.
***Tracer** le graphe des vitesses.*
***Déterminer** la durée totale de l'atterrissage et la décélération de l'appareil.*

1) On trace le graphe des vitesses à partir de l'énoncé



2) $x(t_f) = \int_0^{t_f} v(t).dt + x_0 = A + x_0 = (t_f-0) \times 83{,}3 / 2 + 0 = 1200$ m ⇨ $t_f = 2 \times 1200 / 83{,}3 = 28{,}8$ s

3) $a = (v_f - v_0) / (t_f - t_0) = (0 - 83{,}3) / (28{,}8-0) = -2{,}89$ m.s^{-2}

ou bien $x(24) = 0{,}5 \cdot a \cdot 28{,}8^2 = 1200$ m ⇨ $a = 1200/(0{,}5 \times 28{,}8^2) = -2{,}89$ m.s^{-2}

Exercice N°4 : Subaru WRX STI

A partir de la vidéo ci-contre, tracer le graphe des vitesses aussi précisément que possible* en décomposant le mouvement en autant de phase qu'il y a de rapports.

**: dans Excel, saisir et sélectionner les données puis : Insertion⇨graphique recommandé⇨ nuage de points*

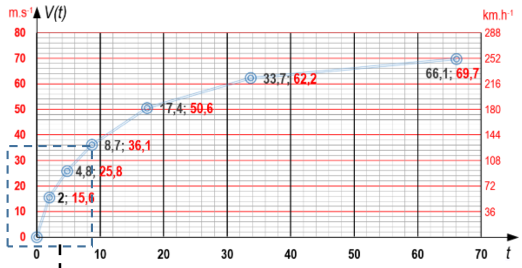
Puis, déterminer :
1) l'accélération dans chaque phase
2) la durée du "0 à 100 km.h^{-1}".
3) la distance parcourue à 100 km.h^{-1}, puis à 251 km.h^{-1}

https://www.youtube.com/watch?v=UwlaUfvasFQ

1) Accélérations

- $a_1 = (15{,}6-0) / (2-0) = 7{,}78$ m.s^{-2}
- $a_2 = (25{,}8-15{,}6) / (4{,}8-2) = 3{,}67$ m.s^{-2}
- $a_3 = (36{,}1-25{,}8) / (8{,}7-4{,}8) = 2{,}64$ m.s^{-2}
- $a_4 = (50{,}6-36{,}1) / (17{,}4-8{,}7) = 1{,}66$ m.s^{-2}
- $a_5 = (62{,}2-50{,}6) / (33{,}7-17{,}4) = 0{,}72$ m.s^{-2}
- $a_6 = (69{,}7-62{,}2) / (66{,}1-62{,}2) = 0{,}23$ m.s^{-2}

		t	v(t)		a	A	x(t)
début de Phase	1	0	0	0	0	0	0
	2	2,00	15,56	56	7,78	15,56	15,56
	3	4,80	25,83	93	3,67	57,94	73,50
		5,54	27,78	**100**	2,64	19,78	77,72
	4	8,70	36,11	130	2,64	120,79	178,74
	5	17,40	50,56	182	1,66	377,00	497,79
	6	33,70	62,22	224	0,72	919,14	1296,14
		66,10	69,72	251	0,23	2137,50	3056,64
		s	*m/s*	*km/h*	*m/s2*	*m*	*m*



2) temps du "0 à 100 km.h^{-1}":

$V(t)=100$ km.h^{-1} ≈ 27,8 m.s^{-1} ⇨ phase 3 ($25{,}8>v(t)>36{,}1$)

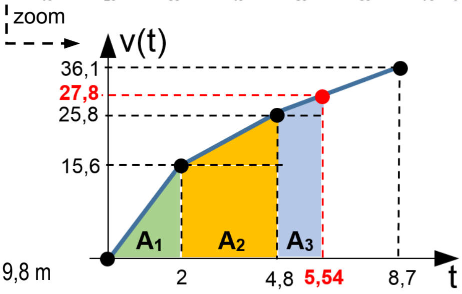
soit t_{100} tel que $v_3(t_{100}) \approx 27{,}8$ m.s^{-1}

$a_3=[v(t_{100})-v_{03}] / [t_{100}-t_{03}] \approx [27{,}8-25{,}8] / [t_{100}-4{,}8] = 2{,}64$ m.s^{-2}

⇨ $[27{,}8-25{,}8] = [t_{100}-4{,}8] \times 2{,}64$

⇨ $[2] = t_{100} \times 2{,}64 - 4{,}8 \times 2{,}64$

⇨ $t_{100} \approx \dfrac{4{,}8 \times 2{,}64 + 2}{2{,}64} \approx 5{,}54$ s



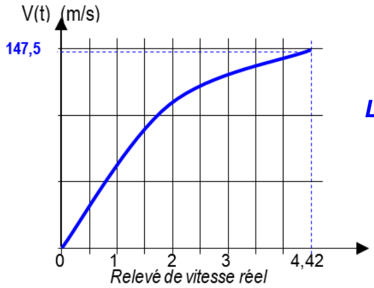
3) position atteinte à 100 km.h^{-1}

$x(5{,}54) = \int_0^{5{,}54} v(t).dt + x_0 = A_1 + A_2 + A_3 + 0$ avec : $\begin{cases} A_1 \approx 2 \times 15{,}6 /2 \approx 15{,}5 \text{ m} \\ A_2 \approx (4{,}8-2) \times 15{,}6 + (4{,}8-2) \times (25{,}8-15{,}6)/2 \approx 57{,}9 \text{ m} \\ A_3 \approx (5{,}54-4{,}8) \times 25{,}8 + (5{,}54-4{,}8) \times (27{,}8-25{,}8)/2 \approx 19{,}8 \text{ m} \end{cases}$

$x(5{,}54) = 77{,}7$ m

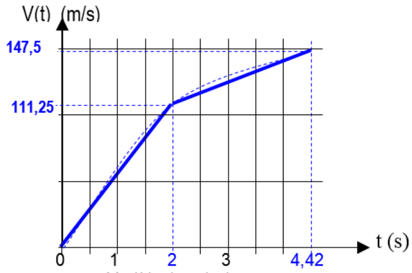
Exercice N°4 : Dragster Top fuel

Les Dragsters les plus rapides sont les TOP-fuel. Des engins de 8m de long équipés de moteur V8 compressés de 8 litres fonctionnant avec un mélange nitrométhane / Méthanol et développant jusqu'à 8000 cv. Le relevé des vitesses lors du dernier record du monde ainsi que le modèle simplifié de calcul sont donnés ci-dessous :



Relevé de vitesse réel

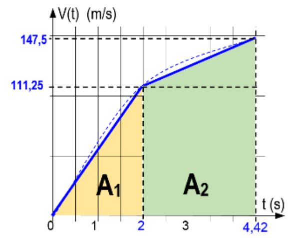
L'accélération est donc supposée faite en deux phases



Modèle de calcul

Si le mouvement est supposé rectiligne uniformément varié dans les deux phases, **déterminer:**
1) les accélérations du véhicule a_1 et a_2 dans chaque phase.
2) la distance totale parcourue (longueur de la piste) ?
3) sa vitesse en km/h au bout de 2s. Idem au bout de 4,42s.
4) le "0 à 100 km/h" en combien de temps ? Sur quelle distance ?

1) $a_1 = (111{,}25-0)/(2-0)=55{,}625$ m.s^{-2}
et $a_2 = (147{,}5-111{,}25)/(4{,}42-2)=14{,}87$ m.s^{-2}
2) distance totale = position en fin de phase 2 :



$$\left.\begin{array}{l} x_2(4{,}42) = \int_2^{4{,}42} v_2(t).dt + x_{02} \\ x_{02} = x_1(2)^* = \int_0^2 v_1(t).dt + x_{01}^{**} \end{array}\right\} \; x_2(4{,}42) = \int_0^2 v_1(t).dt + \int_2^{4{,}42} v_2(t).dt = A_1 + A_2$$

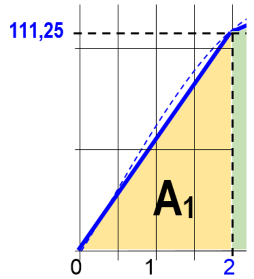
* : x_{02}, position en début de phase, donc en fin de phase 1
** : $x_{01} = x_1(t=0) = 0$

$x_2(4{,}42) = 111{,}25 \times (2-0) + 111{,}25 \times (4{,}42-2) + (147{,}5-111{,}25) \times (4{,}42-2) /2$
$x_2(4{,}42) = 424$ m

3) Vitesse à t=2 et t= 4,42 : lecture directe sur le graphe

$v_1(2)= v_2(2)=111{,}25\ m.s^{-1}$ soit, $111{,}25 \times 3{,}6 = 400{,}5\ km.h^{-1}$ ⇨ **de 0 à 400 km/h en 2s !!!**

$v_2(4{,}42)=147{,}5\ m.s^{-1}$ soit, $147{,}5 \times 3{,}6 = 531\ km.h^{-1}$



4) le "0 à 100 km/h" : $100\ km.h^{-1} << 400{,}5\ km.h^{-1}$ ⇨ phase 1

$v_1(t_{100}) = 100/3{,}6 = 27{,}8\ m.s^{-1}$

En phase 1, $v_1(t_{100}) = a_1 . t_{100} = 27{,}8$ ⇨ = $t_{100} = 27{,}8 / 55{,}625 = 0{,}5$ s

⇨ **de 0 à 100 km/h en 0,5s !!!**

Vous trouverez des dragster plus rapides encore ici: https://www.youtube.com/watch?v=953oB09BlgI

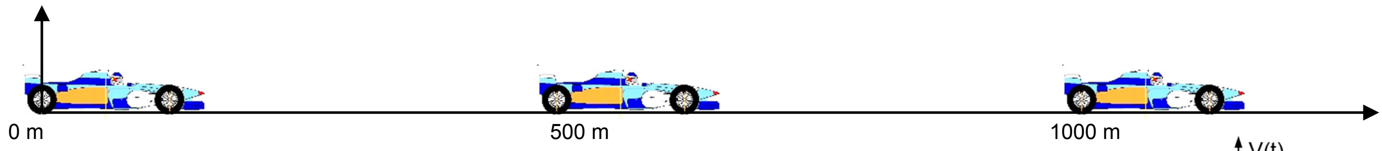
Rq :

la piste mesure ¼ de mile, soit 400 m. Les afficheurs donnent le temps en seconde et la vitesse en miles/h (280 mph = 450 km/h, 310 mph = 500 km/h !!)

Exercice N°4 : Formule 1

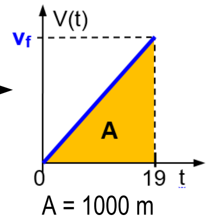
Une formule 1 effectue la distance de 1000 m, départ arrêté, en 19 secondes.

*Si le mouvement est supposé rectiligne uniformément varié, **déterminer** l'accélération du véhicule et sa vitesse au bout de 1000 m. Combien de temps lui faut-il pour parcourir 500m ? Quelle vitesse a-t-il atteint au bout de 500m.*



Corrigé :

1) On trace le graphe des vitesses à partir de l'énoncé →



2) $x(t=19) = \int_0^{19} v(t).dt + v_0 = A + v_0 = (19-0).v_f /2 + 0 = 1000$ m ⇨ $19.v_f/2 = 1000$ ⇨ $v_f = 2 . 1000 / 19$

$v_f = 105{,}2\ m.s^{-1} = 3{,}6 . 105{,}2 = 378{,}9\ km^{-1}$

3) $a = v(19)-v(0)/19-0 = 105{,}2/19 = 5{,}54\ m.s^{-2}$

ou bien $x(19) = 0{,}5 . a . 19^2 = 1000$ m ⇨ $a = 1000/(0{,}5 \times 19^2) = 5{,}54\ m.s^{-2}$

4) $x(t_{500}) = 0{,}5 . a . (t_{500}-t_0)^2 = 0{,}5 \times 5{,}54 \times t_{500}^2 = 500$ m ⇨ $t_{500} = \sqrt{\dfrac{500}{0{,}5 \times 5{,}54}} = 13{,}4$ s

5) $x(t_{500}) = \int_0^{t_{500}} v(t).dt + v_0 = A + v_0 = (t_{500}-0).v_f /2 + 0 = 500$ m ⇨ $t_{500} = 2 \times 500 / 105{,}2 = 9{,}5$ s