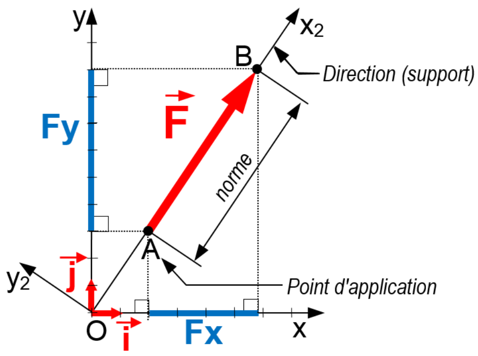
Le vecteur est l'outil mathématique le plus utilisé en mécanique puisqu'il peut représenter une force, un moment, une position, une vitesse, une accélération, ou une contrainte mécanique.

1- DEFINITION

Le vecteur peut être défini graphiquement par 4 paramètres ou analytiquement par ses 3 coordonnées dans un repère. Exemple :



$\vec{F} =$ | direction ou support : axe x_2 ou droite (O,x_2)
| sens : x_2>0 ou vers le haut
| norme : $\|\vec{F}\|$, toujours >0
| point d'application : A

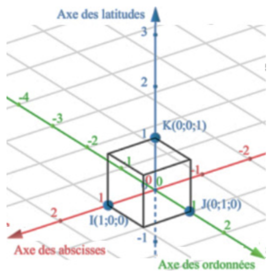
$\vec{F} =$ |

Toujours dans cet ordre

Fx et Fy sont les projections orthogonales de $\vec{F}$ sur les axes du repère

Repère orthonormé R :

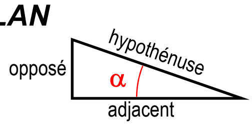
Le repère R (O,x,y,z) a pour vecteurs de base les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ définis tel que :



$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

2- COORDONNEES DANS LE PLAN

2.1. Rappel de trigonométrie :



Pythagore :
Hyp² = opp² + adj²

SOH : sin α = opp/hyp
CAH : cos α = adj/hyp
TOA : tan α = opp/adj

2.2. Relation direction+norme / Coordonnées

Dans R (O,x,y), $\vec{F}$ a pour coordonnées Fx et Fy se note :

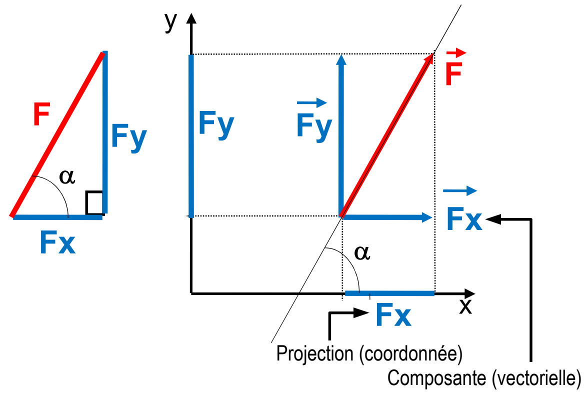
$$\vec{F} = Fx\,.\,\vec{i} + Fy\,.\,\vec{j} = \vec{Fx} + \vec{Fy} = \begin{vmatrix} Fx \\ Fy \end{vmatrix}$$

direction : tan α = | **Fx =**
| **Fy =**

norme : $\|\vec{F}\|$ =

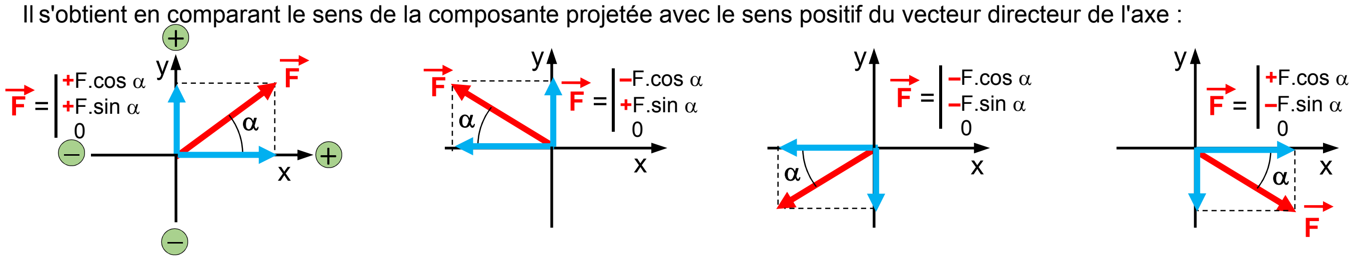
Exemple: $\vec{F} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ α = , $\|\vec{F}\|$ =

Fx = , Fy =

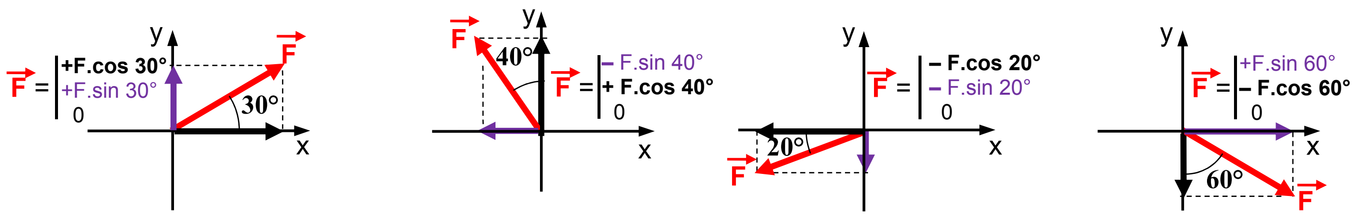


2.3. Le signe des coordonnées

Il s'obtient en comparant le sens de la composante projetée avec le sens positif du vecteur directeur de l'axe :

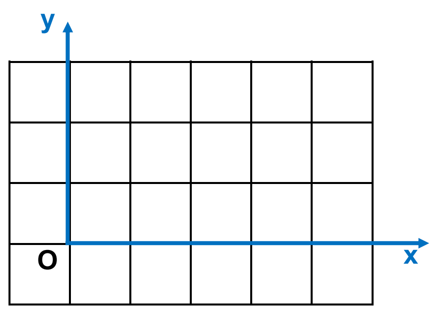


2.4. La projection par le cosinus (axe adjacent à l'angle)



3- ADDITION EN COORDONNEES :

si $\vec{F_1} = \begin{vmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{F_2} = \begin{vmatrix} Fx_2 \\ Fy_2 \end{vmatrix}$ alors $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \Rightarrow \vec{F} = \begin{vmatrix} Fx_1 + Fx_2 \\ Fy_1 + Fy_2 \end{vmatrix}$



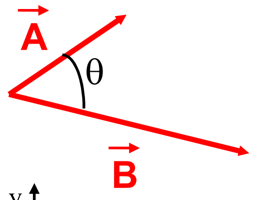
Exemple : $\vec{F} = \begin{vmatrix} Fx\ ? \\ Fy\ ? \end{vmatrix}$ $\vec{F_1} = \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$ $\vec{F_2} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$

$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \Big| \quad + \Big| \quad = \Big| \quad = \Big|$

⇨ Tracer $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, Calculer les coordonnées de $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ puis tracer $\vec{F}$.

4- PRODUIT SCALAIRE

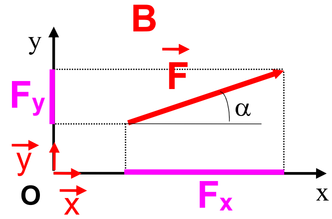
Le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est définit tel que :



$$\vec{A}\cdot\vec{B} = A\,.\,B\,.\cos\,\theta \qquad \text{avec : } \left|\begin{array}{l} A = \|\vec{A}\|,\ B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \end{array}\right.$$

Se lit : « A scalaire B »

<u>Exemple utile : projection d'une force</u>



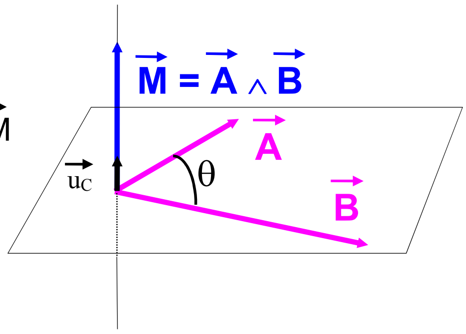
soit $\vec{F} = \left| \begin{array}{l} F_X \\ F_Y \end{array}\right.$ alors : $\begin{array}{l} F_X = \vec{F}\cdot\vec{x} = F.\cos\alpha \\ F_Y = \vec{F}\cdot\vec{y} = F\,.\sin\alpha \end{array}$ car $x = \|\vec{x}\| = 1$
(x est vecteur unitaire)

5- PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{M}$ perpendiculaire au plan (A, B) et définit tel que :

$$\boxed{\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{M} = A\,.\,B\,.\sin\,\theta\,.\,\vec{u}_M} \qquad \text{avec : } \left|\begin{array}{l} A = \|\vec{A}\|,\ B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \\ \vec{u}_M : \text{vecteur directeur de } \vec{M} \end{array}\right.$$

Se lit : « A vectoriel B »



Remarque :
- ✓ si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles, alors $A \wedge B = 0$
- ✓ si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, alors $\vec{A}\wedge\vec{B} = A.B$
- ✓ $\|\vec{M}\| = M = A.B.\sin\theta$

propriétés :

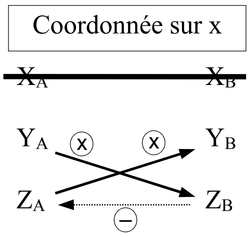
$$\vec{A}\wedge\vec{B} = -\vec{B}\wedge\vec{A}$$
$$\vec{A}\wedge(\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A}\wedge\vec{B} + \vec{A}\wedge\vec{C}$$
$$k.(\vec{A}\wedge\vec{B}) = k.\vec{A}\wedge\vec{B} = \vec{A}\wedge k.\vec{B}$$

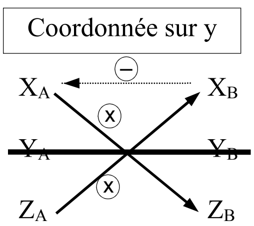
Calcul en coordonnées :

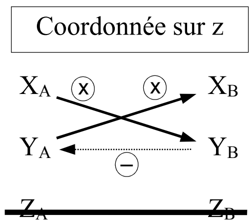
Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

$$\vec{A} = \left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{array}\right. \quad \vec{B} = \left|\begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{array}\right. \quad \text{alors, } \vec{A}\wedge\vec{B} = \left|\begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} Y_A.Z_B - Y_B.Z_A \\ Z_A.X_B - Z_B.X_A \\ X_A.Y_B - X_B.Y_A \end{array}\right.$$

Pour obtenir la coordonnée «$Y_A.Z_B - Y_B.Z_A$» sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.



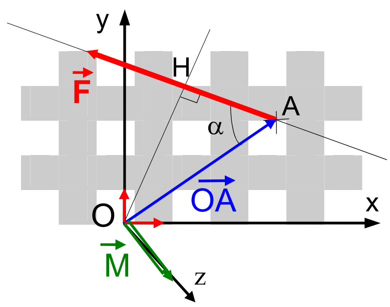




Exemple 1:

Soit $\vec{M} = \vec{OA}\wedge\vec{F}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$ ainsi que $M = \|\vec{M}\|$, norme du vecteur $\vec{M}$:

$$\vec{OA} = \left|\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array}\right. \quad \vec{F} = \left|\begin{array}{l} -5 \\ +2 \\ 0 \end{array}\right. \quad \text{alors, } \vec{OA}\wedge\vec{F} = \left|\begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -5 \\ 2 \\ 0 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$



<u>Remarques</u> :
- ✓ $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ étant dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{M}$ est sur l'axe z perpendiculaire au plan $(\vec{x}, \vec{y})$.
- ✓ $\|\vec{M}\| = M = OA\,.\,F\,.\sin\alpha$ avec $OA\sin\alpha = OH$ soit :
  $M = F \times OH$

Exemple 2 :

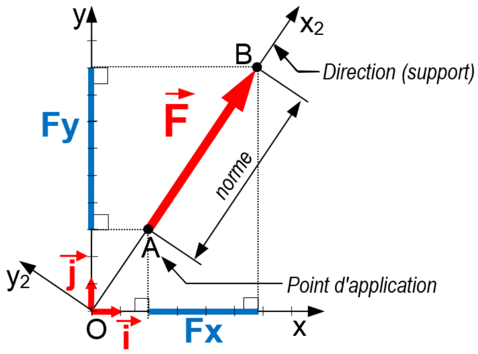
Soit $\vec{M} = \vec{AB}\wedge\vec{R}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$.

$$\text{avec : } \vec{AB} = \left|\begin{array}{l} -3 \\ 2 \\ -2 \end{array}\right. \text{ et } \vec{R} = \left|\begin{array}{l} -6 \\ 4 \\ -4 \end{array}\right. \quad \text{alors, } \vec{AB}\wedge\vec{R} = \left|\begin{array}{l} -3 \\ 2 \\ -2 \end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l} -6 \\ 4 \\ -4 \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right. = \left|\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right.$$

Le vecteur est l'outil mathématique le plus utilisé en mécanique puisqu'il peut représenter une force, un moment, une position, une vitesse, une accélération, ou une contrainte mécanique.

1- DEFINITION

Le vecteur peut être défini graphiquement par 4 paramètres ou analytiquement par ses 3 coordonnées dans un repère. Exemple :



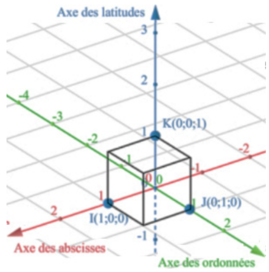
$\vec{F} =$ | direction ou support : axe x_2 ou droite (O,x_2)
sens : x_2>0 ou vers le haut
norme : $\|\vec{F}\|$, toujours >0
point d'application : A

$\vec{F} = \begin{vmatrix} Fx \\ Fy \\ Fz\ (=0\ ici) \end{vmatrix}$ } Toujours dans cet ordre

Fx et Fy sont les projections orthogonales de $\vec{F}$ sur les axes du repère

Repère orthonormé R :

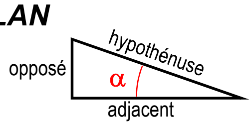
Le repère R (O,x,y,z) a pour vecteurs de base les vecteurs unitaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ définis tel que :



$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$

2- COORDONNEES DANS LE PLAN

2.1. Rappel de trigonométrie :



Pythagore :
Hyp² = opp² + adj²

SOH : sin α = opp/hyp
CAH : cos α = adj/hyp
TOA : tan α = opp/adj

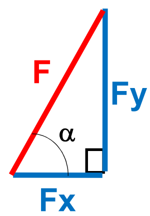
2.2. Relation direction+norme / Coordonnées

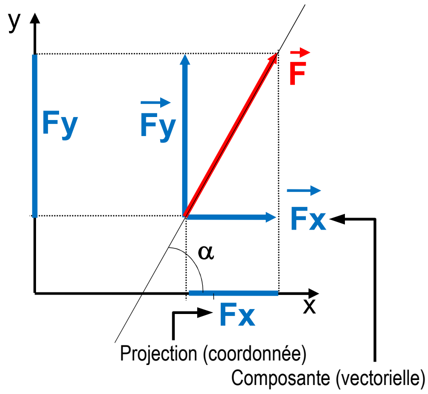
Dans R (O,x,y), $\vec{F}$ a pour coordonnées Fx et Fy se note :

$$\vec{F} = Fx\,.\,\vec{i} + Fy\,.\,\vec{j} = \vec{Fx} + \vec{Fy} = \begin{vmatrix} Fx \\ Fy \end{vmatrix}$$

direction : tan α = Fy/Fx | **Fx = F.cos α**
Fy = F.sin α

norme : $\|\vec{F}\| = \sqrt{Fx^2+Fy^2}$



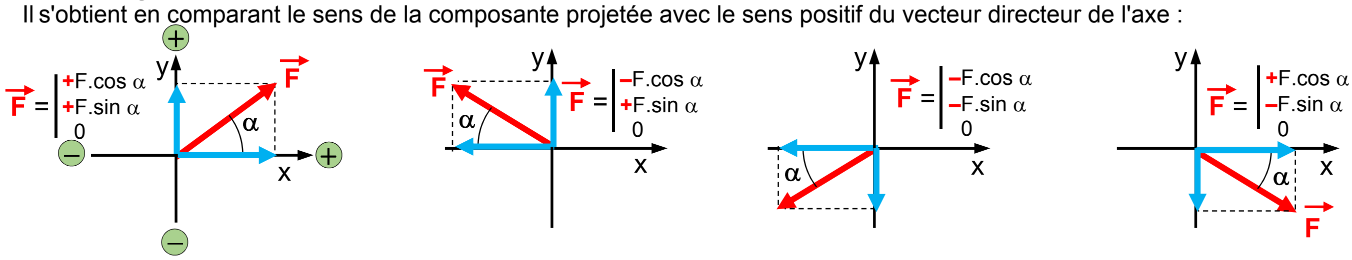


Exemple: $\vec{F} = \begin{vmatrix} 4 \\ 3 \end{vmatrix}$ $\alpha = \tan^{-1}(3/4) = 36{,}87$, $\|\vec{F}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$

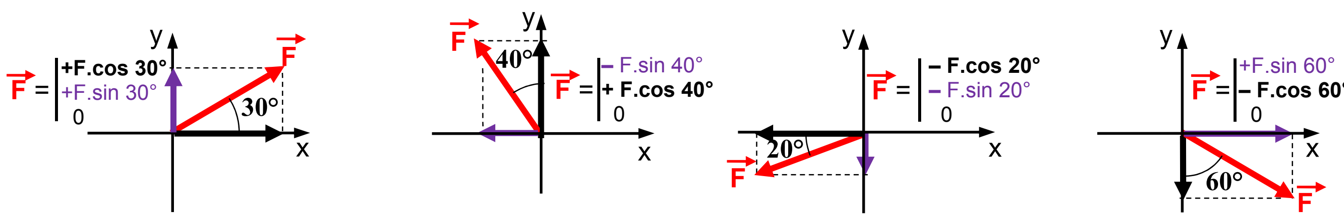
Fx = F.cos 36,87° = 4 , Fy = F.sin 36,87° = 3

2.3. Le signe des coordonnées

Il s'obtient en comparant le sens de la composante projetée avec le sens positif du vecteur directeur de l'axe :

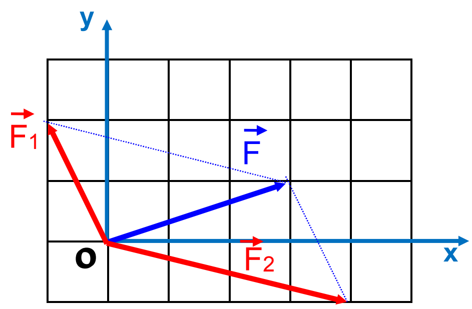


2.4. La projection par le cosinus (axe adjacent à l'angle)



3- ADDITION EN COORDONNEES :

si $\vec{F_1} = \begin{vmatrix} Fx_1 \\ Fy_1 \end{vmatrix}$ et $\vec{F_2} = \begin{vmatrix} Fx_2 \\ Fy_2 \end{vmatrix}$ alors $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} \Rightarrow \vec{F} = \begin{vmatrix} Fx_1 + Fx_2 \\ Fy_1 + Fy_2 \end{vmatrix}$



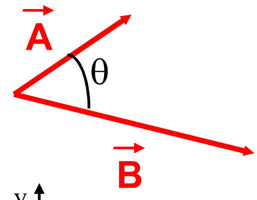
Exemple : $\vec{F} = \begin{vmatrix} Fx\ ? \\ Fy\ ? \end{vmatrix}$ $\vec{F_1} = \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix}$ $\vec{F_2} = \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix}$

$$\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} = \begin{vmatrix} 4 \\ -1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 -1 \\ -1+2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 \\ 1 \end{vmatrix}$$

⇨ Tracer $\vec{F_1}$ et $\vec{F_2}$, Calculer les coordonnées de $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2}$ puis tracer $\vec{F}$.

4- PRODUIT SCALAIRE

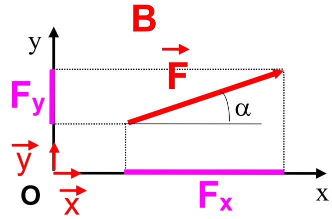
Le produit scalaire de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est définit tel que :



$$\vec{A}\,.\,\vec{B} = A\,.\,B\,.\cos\,\theta \quad \text{avec :} \left| \begin{array}{l} A = \|\vec{A}\|,\ B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \end{array} \right.$$

Se lit : « A scalaire B »

<u>Exemple utile : projection d'une force</u>



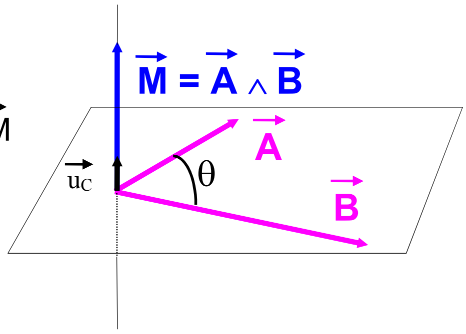
soit $\vec{F} = \left| \begin{array}{l} F_X \\ F_Y \end{array} \right.$ alors : $\begin{array}{l} F_X = \vec{F}\,.\,\vec{x} = F.\cos\alpha \\ F_Y = \vec{F}\,.\,\vec{y} = F\,.\,\sin\alpha \end{array}$ car $x = \|\vec{x}\| = 1$
(x est vecteur unitaire)

5- PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de 2 vecteurs $\vec{A}$ et $\vec{B}$ est un vecteur $\vec{M}$ perpendiculaire au plan (A, B) et définit tel que :

$$\boxed{\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{M} = A\,.\,B\,.\sin\,\theta\,.\,\vec{u}_M} \quad \text{avec :} \left| \begin{array}{l} A = \|\vec{A}\|,\ B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \\ \vec{u}_M : \text{vecteur directeur de } \vec{M} \end{array} \right.$$

Se lit : « A vectoriel B »



Remarque : ✓ si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont parallèles, alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{0}$
✓ si $\vec{A}$ et $\vec{B}$ sont perpendiculaires, alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = A.B$
✓ $\|\vec{M}\| = M = A.B.\sin\theta$

propriétés :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = -\,\vec{B} \wedge \vec{A}$$
$$\vec{A} \wedge (\vec{B}+\vec{C}) = \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C}$$
$$k.(\vec{A} \wedge \vec{B}) = k.\,\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge k.\vec{B}$$

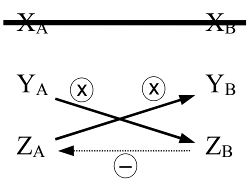
Calcul en coordonnées :

Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

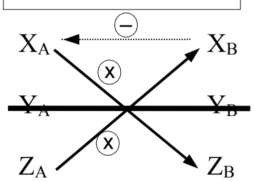
$$\vec{A} = \left| \begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{array} \right. \quad \vec{B} = \left| \begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{array} \right. \quad \text{alors, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \left| \begin{array}{l} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} Y_A.Z_B - Y_B.Z_A \\ Z_A.X_B - Z_B.X_A \\ X_A.Y_B - X_B.Y_A \end{array} \right.$$

Pour obtenir la coordonnée «$Y_A.Z_B - Y_B.Z_A$» sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.

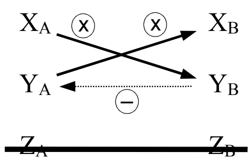
Coordonnée sur x



Coordonnée sur y



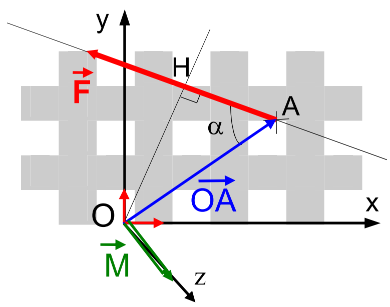
Coordonnée sur z



Exemple 1:

Soit $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$ ainsi que $M = \|\vec{M}\|$, norme du vecteur $\vec{M}$:

$$\vec{OA} = \left| \begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right. \quad \vec{F} = \left| \begin{array}{c} -5 \\ +2 \\ 0 \end{array} \right. \quad \text{alors, } \vec{OA} \wedge \vec{F} = \left| \begin{array}{l} 4 \\ 3 \\ 0 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} -5 \\ 2 \\ 0 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 3x0-0x(2) \\ 0x(-5)-4x0 \\ 4x2-3x(-5) \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 \\ 23 \end{array} \right.$$



<u>Remarques</u> :
✓ $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ étant dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{M}$ est sur l'axe z perpendiculaire au plan $(\vec{x}, \vec{y})$.
✓ $\|\vec{M}\| = M = OA\,.\,F\,.\sin\alpha$ avec $OA\sin\alpha = OH$ soit :
$M = F \times OH$

Exemple 2 :

Soit $\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{R}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$.

$$\text{avec : } \vec{AB} = \left| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right. \text{ et } \vec{R} = \left| \begin{array}{c} -6 \\ 4 \\ -4 \end{array} \right. \text{ alors, } \vec{AB} \wedge \vec{R} = \left| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \\ -2 \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{c} -6 \\ 4 \\ -4 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} 2x(-4)-(-2)x4 \\ (-2)x(-6)-(-3)x(-4) \\ -3x4-2x(-6) \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} -8+8 \\ 12-12 \\ -12+12 \end{array} \right. = \left| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} \right.$$

Donc, $\vec{M} = \vec{0}$. Il fallait remarquer que $\vec{R}$ et $\vec{AB}$ sont parallèles ($\vec{R} = 2\,.\,\vec{AB}$)