

RAPPELS DE MATHS

Produit vectoriel en coordonnées :

Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A \\ Z_A \cdot X_B - Z_B \cdot X_A \\ X_A \cdot Y_B - X_B \cdot Y_A \end{pmatrix}$$

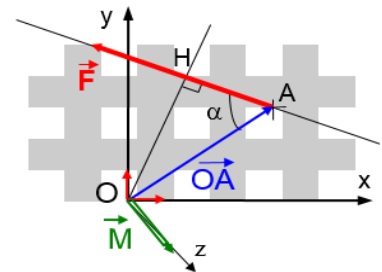
Pour obtenir la coordonnée « $Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A$ » sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.

Coordonnée sur x	Coordonnée sur y	Coordonnée sur z

Exemple :

Soit $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$ ainsi que $M = \|\vec{M}\|$, norme du vecteur $\vec{M}$:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 - 0 \times (2) \\ 0 \times (-5) - 4 \times 0 \\ 4 \times 2 - 3 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$$



Remarques :

- ✓ $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ étant dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{M}$ est sur l'axe z perpendiculaire au plan $(\vec{x}, \vec{y})$.
- ✓ $\|\vec{M}\| = M = OA \cdot F \cdot \sin \alpha$ avec $OA \sin \alpha = OH$ soit :
 $M = F \times OH$

RAPPELS DE MECA

6.3 Vecteur moment :

Le calcul du vecteur moment permet de déterminer n'importe quel moment de n'importe quelle force dans le plan ou dans l'espace et ce, avec précision et à coup sûr. Il nécessite simplement la connaissance :

- des coordonnées des points (en m)
- des coordonnées des forces (en N)

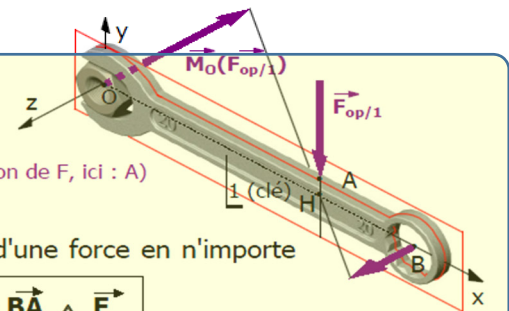
Le « vecteur moment au point O de la force F appliquée en A » est défini tel que :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Point sur le support de F
(en général, point d'application de F, ici : A)

Pour les besoins de l'étude, on peut être amené à calculer le moment d'une force en n'importe quel point de l'espace ! Ainsi, on définirait de même :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}$$



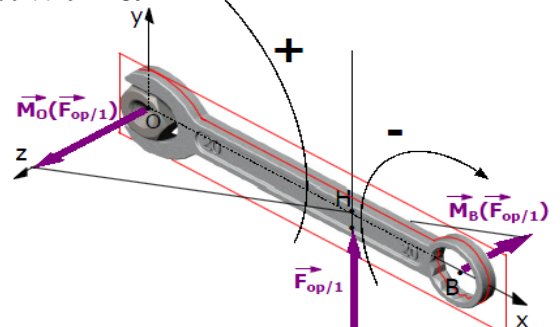
remarque - vecteur moment nul (fig. 1) :

$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ quelque soit le point C appartenant au support (Δ) de $\vec{F}$. En effet, $\vec{F}$ et $\vec{CA}$ sont colinéaires. Notamment pour le point d'application de $\vec{F}$: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

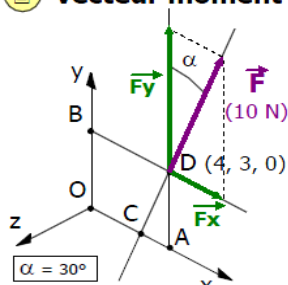
Le moment d'une force en un point de son support est toujours nul.

remarque - sens du vecteur moment :

Le sens du vecteur moment est cohérent avec la convention de signe du moment scalaire : ci-contre $M_O(\vec{F}_{op/1}) > 0$ et $M_B(\vec{F}_{op/1}) < 0$



vecteur moment - exemples :

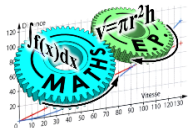


Déterminer $\vec{M}_O(\vec{F})$, $\vec{M}_A(\vec{F})$, $\vec{M}_B(\vec{F})$ et $\vec{M}_C(\vec{F})$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{OD} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 20,64 \end{pmatrix} \\ \vec{M}_A(\vec{F}) &= \vec{AD} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10/2 \\ 3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -15 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CD} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BD} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 10/2 \\ 10\sqrt{3}/2 \\ 0 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 34,64 \end{pmatrix}$$



EXERCICE 1

Déterminer les vecteurs moment suivants.

Échelles des distances : 1 carreau $\Rightarrow$ 2 m, Échelles des forces : 1 carreau $\Rightarrow$ 50 N

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) =$$

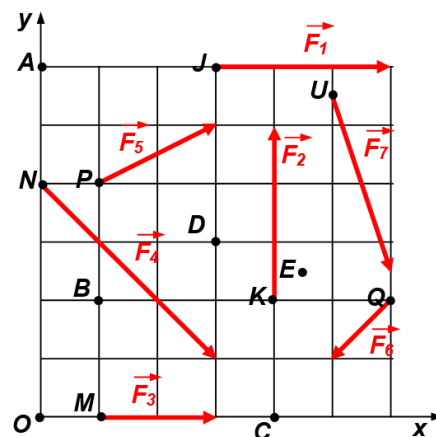
$$\vec{M}_A(\vec{F}_2) =$$

$$\vec{M}_J(\vec{F}_3) =$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}_4) =$$

$$\vec{M}_K(\vec{F}_5) =$$

$$\vec{M}_N(\vec{F}_6) =$$



EXERCICE 2

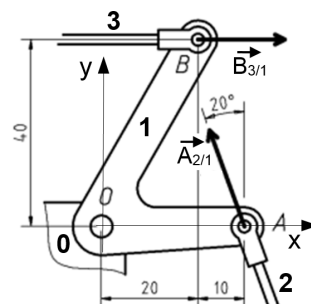
Un levier de renvoi (1) est en liaison pivot d'axe (O,z) avec le bâti (0).

$\|\vec{A}_{2/1}\| = 22,7 \text{ N}$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{A}_{2/1}$ puis $\vec{M}_O(\vec{A}_{2/1})$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{B}_{3/1}$ puis $\vec{M}_O(\vec{B}_{3/1})$.

En déduire $\|\vec{B}_{3/1}\|$.



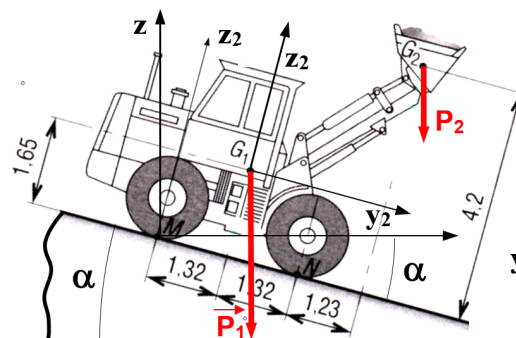
EXERCICE 3

Soit un tractopelle stationné dans une pente d'angle $\alpha = 20^\circ$.

$P_1 = 12.000 \text{ daN}$, $P_2 = 3.000 \text{ daN}$

Déterminer les coordonnées de $\vec{P}_1$ puis déterminer $\vec{M}_M(\vec{P}_1)$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{P}_2$ puis déterminer $\vec{M}_N(\vec{P}_2)$.

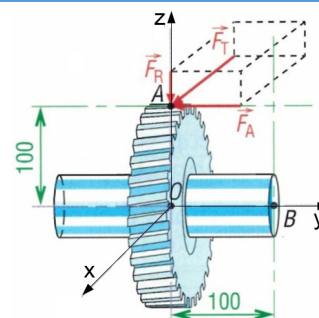


EXERCICE 4

Une roue dentée à denture hélicoïdale subit un effort d'engrènement $\vec{F}$ au point A:

Ses composantes sont $F_A = 200 \text{ daN}$, $F_B = 100 \text{ daN}$, $F_C = 400 \text{ daN}$

Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$ puis $\vec{M}_B(\vec{F})$.



EXERCICE 5

Soit une charge suspendue à une potence d'atelier en E :

- Dimensions en mm : OA=2400, AB=1200, BC=300, CD=1000, DE=700
- Charge maximale à soulever $F=10.000 \text{ N}$. Encastrement en O.
- Masse de la potence : $m = 800 \text{ kg}$, $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$ puis $\vec{M}_O(\vec{F})$.

Déterminer les coordonnées de $\vec{P}$ puis $\vec{M}_A(\vec{P})$.

