

RAPPELS DE MATHS

Produit vectoriel en coordonnées :

Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A \\ Z_A \cdot X_B - Z_B \cdot X_A \\ X_A \cdot Y_B - X_B \cdot Y_A \end{pmatrix}$$

Pour obtenir la coordonnée « $Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A$ » sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.

Coordonnée sur x	Coordonnée sur y	Coordonnée sur z

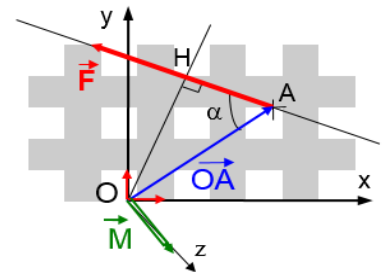
Exemple :

Soit $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Déterminer les coordonnées de $\vec{M}$ ainsi que $M = \|\vec{M}\|$, norme du vecteur $\vec{M}$:

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 - 0 \times (2) \\ 0 \times (-5) - 4 \times 0 \\ 4 \times 2 - 3 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- ✓ $\vec{OA}$ et $\vec{F}$ étant dans le plan $(\vec{x}, \vec{y})$, $\vec{M}$ est sur l'axe z perpendiculaire au plan $(\vec{x}, \vec{y})$.
- ✓ $\|\vec{M}\| = M = OA \cdot F \cdot \sin \alpha$ avec $OA \sin \alpha = OH$ soit :
 $M = F \times OH$



RAPPELS DE MECA

6.3 Vecteur moment :

Le calcul du vecteur moment permet de déterminer n'importe quel moment de n'importe quelle force dans le plan ou dans l'espace et ce, avec précision et à coup sûr. Il nécessite simplement la connaissance :

- des coordonnées des points (en m)
- des coordonnées des forces (en N)

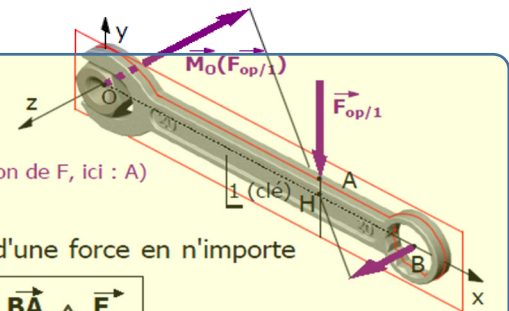
Le « vecteur moment au point O de la force F appliquée en A » est défini tel que :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OA} \wedge \vec{F}$$

Point sur le support de F
(en général, point d'application de F, ici : A)

Pour les besoins de l'étude, on peut être amené à calculer le moment d'une force en n'importe quel point de l'espace ! Ainsi, on définirait de même :

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F}$$



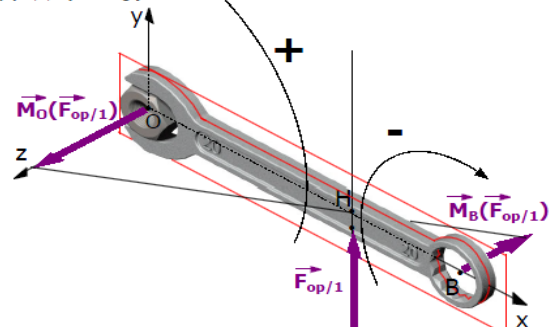
remarque - vecteur moment nul (fig. 1) :

$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{CA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ quelque soit le point C appartenant au support (Δ) de $\vec{F}$. En effet, $\vec{F}$ et $\vec{CA}$ sont colinéaires. Notamment pour le point d'application de $\vec{F}$: $\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

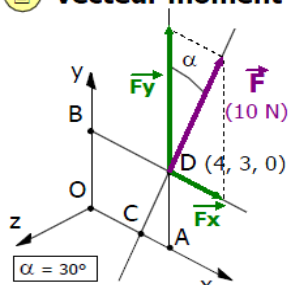
Le moment d'une force en un point de son support est toujours nul.

remarque - sens du vecteur moment :

Le sens du vecteur moment est cohérent avec la convention de signe du moment scalaire : ci-contre $M_O(\vec{F}_{op/1}) > 0$ et $M_B(\vec{F}_{op/1}) < 0$



vecteur moment - exemples :

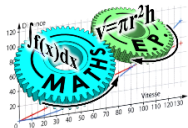


Déterminer $\vec{M}_O(\vec{F})$, $\vec{M}_A(\vec{F})$, $\vec{M}_B(\vec{F})$ et $\vec{M}_C(\vec{F})$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O(\vec{F}) &= \vec{OD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 & 10/2 & 0 \\ 3 & 10\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 20,64 \end{vmatrix} \\ \vec{M}_A(\vec{F}) &= \vec{AD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 0 & 10/2 & 0 \\ 3 & 10\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}) = \vec{BD} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BD} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 & 10/2 & 0 \\ 0 & 10\sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 34,64 \end{vmatrix}$$



TD 4, 5, 6 - Actions Mécaniques

BTS MV¹

Calcul du vecteur moment d'une force

EXERCICE 1

OA = 2 m AB = BC = 0.5 m, $F = \|F\| = 300$ N

Calculer le vecteur Moment en O de F.

Relation littérale : $\vec{M}_O(\vec{F}) =$ _____

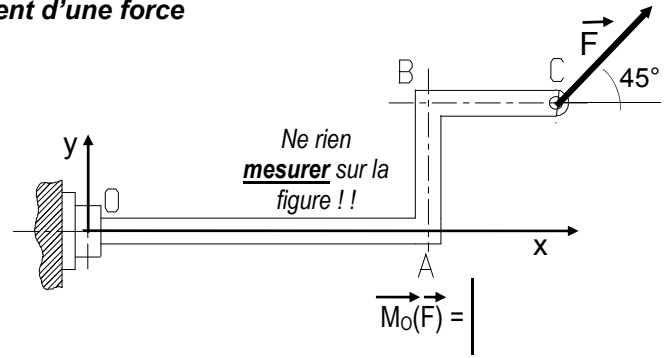
conditions : _____

$\vec{M}_O(\vec{F}) =$ _____

Calculer $M_A(F)$ et justifier le résultat en une phrase.

$\vec{M}_A(\vec{F}) =$ _____

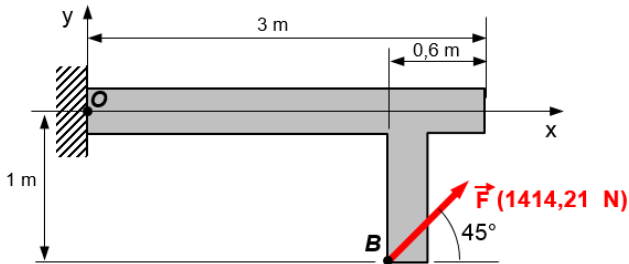
Justification : _____



EXERCICE 2

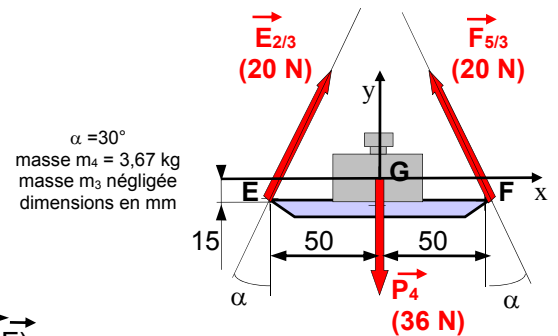
2 - Soit une masse (4) posée sur un plateau (3) ci-contre :

Calculer $\vec{M}_E(\vec{F}_{5/3})$



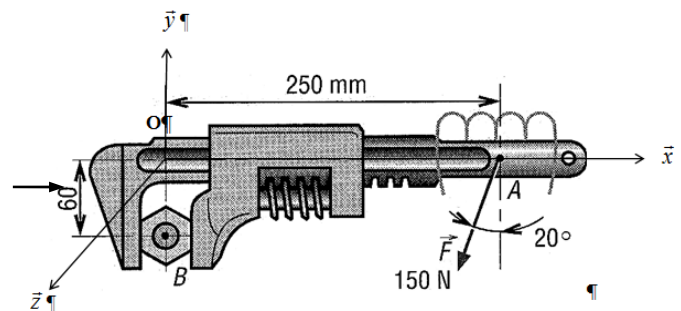
EXERCICE 3

- Calculer $\vec{M}_O(\vec{F})$.



EXERCICE 4

Calculer $\vec{M}_B(\vec{F})$.



EXERCICE 5

Calculer le vecteur moment de chaque force en chaque point (7 forces x 13 points = 91 moments!!)

$\vec{M}_O(\vec{F}_1) =$ _____

$\vec{M}_O(\vec{F}_2) =$ _____

...

$\vec{M}_B(\vec{F}_3) =$ _____

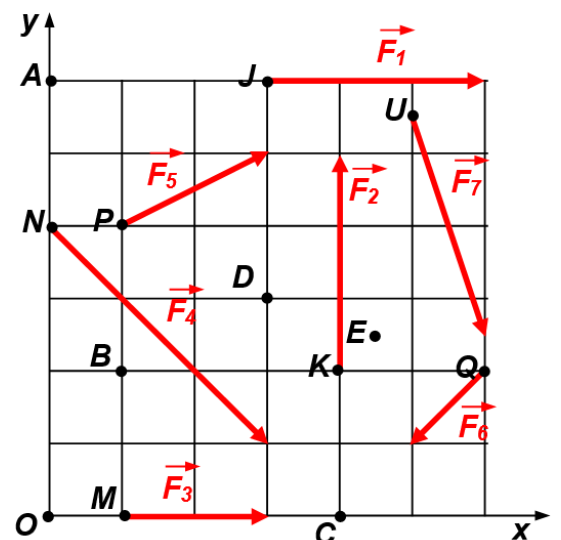
$\vec{M}_B(\vec{F}_4) =$ _____

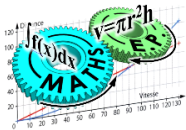
...

$\vec{M}_C(\vec{F}_5) =$ _____

$\vec{M}_C(\vec{F}_6) =$ _____

...





TD 4, 5, 6 - Actions Mécaniques

BTS MV¹

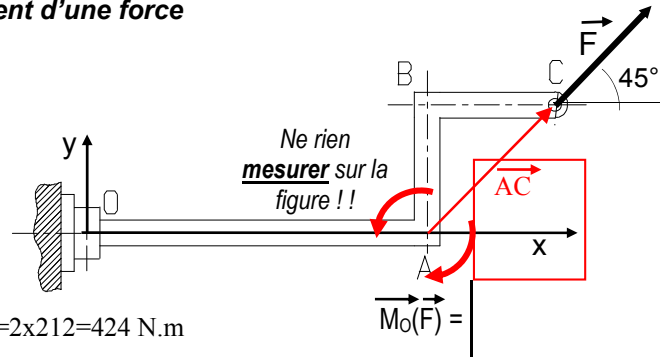
Calcul du vecteur moment d'une force

EXERCICE 1

OA = 2 m AB = BC = 0.5 m, F = || F || = 300 N
Calculer le vecteur Moment en O de F.

Relation littérale : $\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OC} \wedge \vec{F}$
conditions :

$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \begin{vmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 300 \cdot \cos 45^\circ \\ 300 \cdot \sin 45^\circ \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 212 \\ 212 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2,5 \times 212 - 0,5 \times 212 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \times 212 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 424 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$



Calculer $\vec{M}_A(\vec{F})$ et justifier le résultat en une phrase.

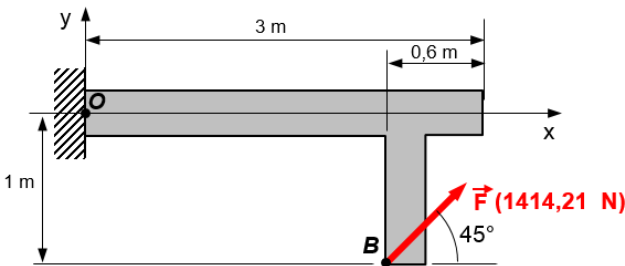
$$\vec{M}_A(\vec{F}) = \vec{AC} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 0,5 & 0 & 0 \\ 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 212 \\ 212 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0,5 \times 212 - 0,5 \times 212 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

Justification : le PV de 2 vecteurs colinéaires est nul, le moment d'une force en son point d'application est nul

EXERCICE 2

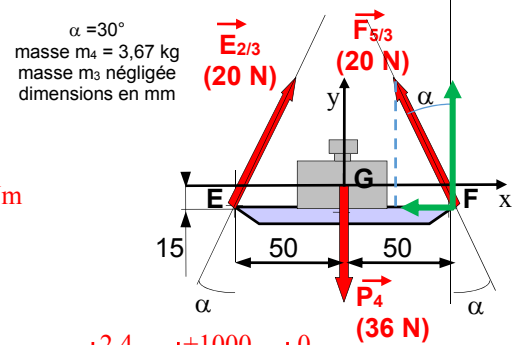
2 - Soit une masse (4) posée sur un plateau (3) ci-contre :

$$\text{Calculer } \vec{M}_E(\vec{F}_{5/3}) = \vec{EF} \wedge \vec{F}_{5/3} = \begin{vmatrix} 100 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -10 & 17,32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \times 17,32 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1732 \end{vmatrix} \text{ Nm}$$



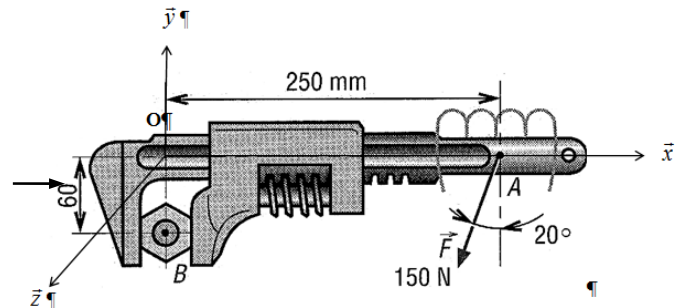
EXERCICE 3

$$\text{Calculer } \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OB} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 2,4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} +1000 \\ +1000 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +3400 \end{vmatrix} \text{ Nm}$$



EXERCICE 4

$$\text{Calculer } \vec{M}_B(\vec{F}) = \vec{BA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 250 & 60 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -51,3 \\ -149,5 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -32.160 \end{vmatrix} \text{ N.mm}$$



EXERCICE 5

Calculer le vecteur moment de chaque force en chaque point (7 forces x 13 points = 91 moments!!)

$$\vec{M}_O(\vec{F}_1) = \vec{OJ} \wedge \vec{F}_1 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 300 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1800 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_O(\vec{F}_2) = \vec{OK} \wedge \vec{F}_2 = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 300 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +1200 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$

...

$$\vec{M}_B(\vec{F}_3) = \vec{BM} \wedge \vec{F}_3 = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 200 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ +400 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_B(\vec{F}_4) = \vec{BN} \wedge \vec{F}_4 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 300 \\ -300 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -300 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$

...

$$\vec{M}_C(\vec{F}_5) = \vec{CP} \wedge \vec{F}_5 = \begin{vmatrix} -3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 200 \\ 100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ -1100 \end{vmatrix} \text{ N.m}$$

$$\vec{M}_C(\vec{F}_6) = \vec{CQ} \wedge \vec{F}_6 = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} -100 \\ -100 \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$$

...

$\vec{CQ}$ et $\vec{F}_6$ colinéaire

