

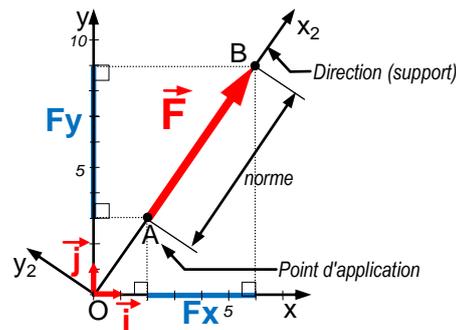


Le vecteur est l'outil mathématique le plus utilisé en mécanique puisqu'il peut représenter une force, un moment, une position, une vitesse, une accélération, ou une contrainte mécanique.

1- DEFINITION

Le vecteur peut être défini graphiquement par 4 paramètres ou analytiquement par ses 3 coordonnées dans un repère. Exemple :

$$\vec{F} = \begin{cases} \text{direction ou support : axe } x_2 \text{ ou droite } (O, x_2) \\ \text{sens : } x_2 > 0 \text{ ou vers le haut} \\ \text{norme : } \|\vec{F}\| \text{ en Newton} \\ \text{point d'application : A} \end{cases} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z = 0 \end{pmatrix}$$

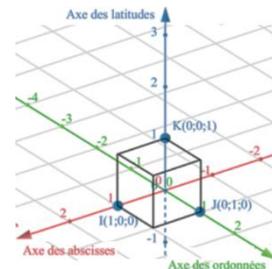


F_x et F_y sont les projections orthogonales de \vec{F} sur les axes du repère

Repère orthonormé R :

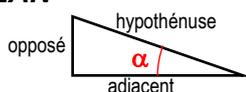
Le repère R (O,x,y,z) a pour vecteurs de base les vecteurs unitaires \vec{i} , \vec{j} et \vec{k} définis tel que :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \quad \text{et} \quad \vec{i} \perp \vec{j} \perp \vec{k}$$



2- COORDONNEES DANS LE PLAN

2.1. Rappel de trigonométrie :



Pythagore : $Hyp^2 = opp^2 + adj^2$

SOH : $\sin \alpha = opp/hyp$
CAH : $\cos \alpha = adj/hyp$
TOA : $\tan \alpha = opp/adj$

2.2. Relation direction+norme / Coordonnées

Dans R (O,x,y), \vec{F} a pour coordonnées F_x et F_y se note :

$$\vec{F} = F_x \cdot \vec{i} + F_y \cdot \vec{j} = \vec{F}_x + \vec{F}_y = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$$

direction : $\tan \alpha = F_y/F_x$

$$\begin{cases} F_x = F \cdot \cos \alpha \\ F_y = F \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

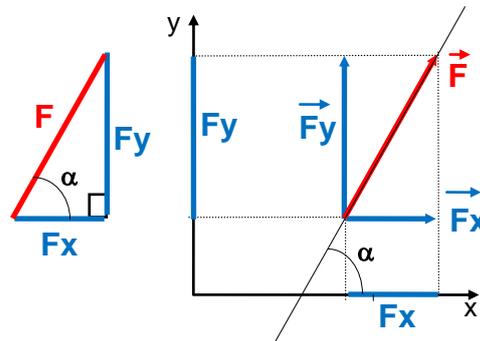
norme : $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$

$$\alpha = \tan^{-1} (3/4) = 36.87^\circ, \quad \|\vec{F}\| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$$

Exemple: $\vec{F} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

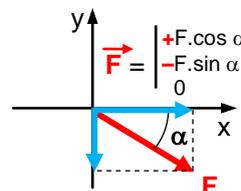
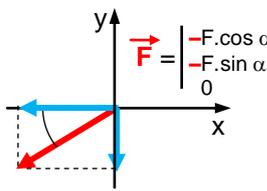
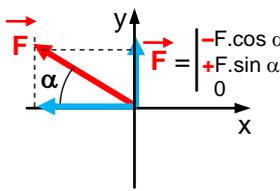
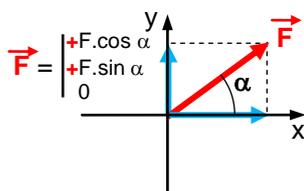
$$F_x = F \cdot \cos 36,87^\circ = 4, \quad F_y = F \cdot \sin 36,87^\circ = 3$$

$$\begin{cases} \sin \alpha = F_y / F \\ \cos \alpha = F_x / F \\ \tan \alpha = F_y / F_x \end{cases}$$

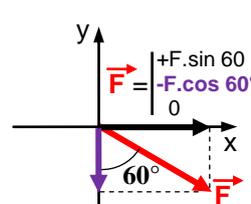
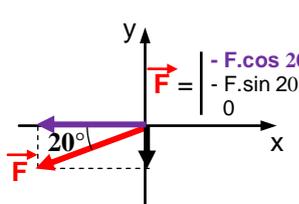
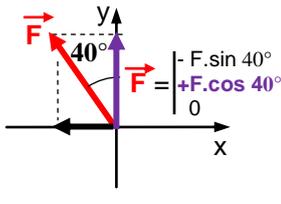
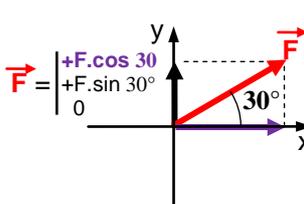


2.3. Le signe des coordonnées

Il s'obtient en comparant le sens de la composante projetée avec le sens positif de l'axe :



2.4. La projection par le cosinus (axe adjacent à l'angle)



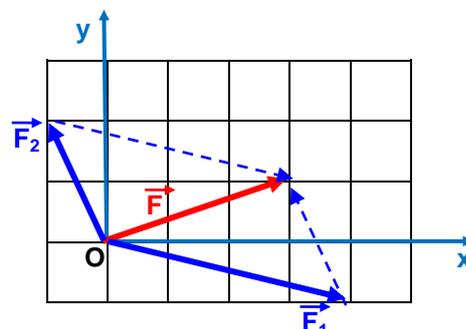
3- ADDITION EN COORDONNEES :

si $\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} F_{x1} \\ F_{y1} \end{pmatrix}$ et $\vec{F}_2 = \begin{pmatrix} F_{x2} \\ F_{y2} \end{pmatrix}$ alors $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \Rightarrow \vec{F} = \begin{pmatrix} F_{x1} + F_{x2} \\ F_{y1} + F_{y2} \end{pmatrix}$

exemple : $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x ? \\ F_y ? \end{pmatrix}$

$$\vec{F}_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$



4- PRODUIT SCALAIRE

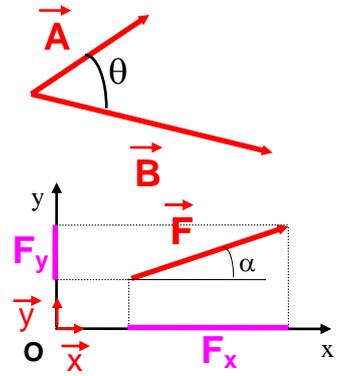
Le produit scalaire de 2 vecteurs \vec{A} et \vec{B} est défini tel que :

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A \cdot B \cdot \cos \theta \quad \text{avec : } \begin{cases} A = \|\vec{A}\|, B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \end{cases}$$

Se lit : « A scalaire B »

Exemple utile : projection d'une force

soit $\vec{F} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}$ alors : $F_x = \vec{F} \cdot \vec{x} = F \cdot \cos \alpha$ car $x = \|\vec{x}\| = 1$ (x est vecteur unitaire)
 $F_y = \vec{F} \cdot \vec{y} = F \cdot \sin \alpha$



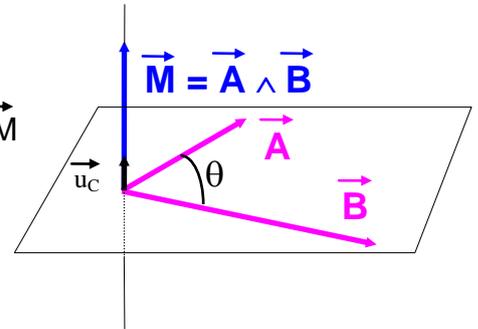
5- PRODUIT VECTORIEL

Le produit vectoriel de 2 vecteurs \vec{A} et \vec{B} est un vecteur \vec{M} perpendiculaire au plan (A, B) et défini tel que :

$$\vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{M} = A \cdot B \cdot \sin \theta \cdot \vec{u}_M \quad \text{avec : } \begin{cases} A = \|\vec{A}\|, B = \|\vec{B}\| \\ \theta = (\vec{A}, \vec{B}) \\ \vec{u}_M : \text{vecteur directeur de } \vec{M} \end{cases}$$

Se lit : « A vectoriel B »

- Remarque :**
- ✓ si \vec{A} et \vec{B} sont parallèles, alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = 0$
 - ✓ si \vec{A} et \vec{B} sont perpendiculaires, alors $\vec{A} \wedge \vec{B} = A \cdot B$
 - ✓ $\|\vec{M}\| = M = A \cdot B \cdot \sin \theta$



propriétés :

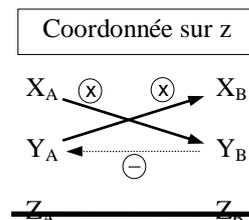
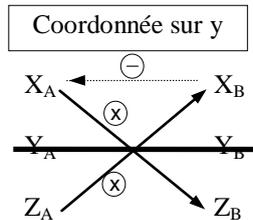
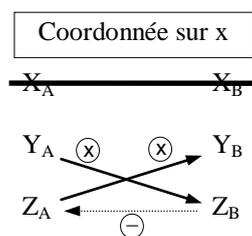
$$\begin{aligned} \vec{A} \wedge \vec{B} &= -\vec{B} \wedge \vec{A} \\ \vec{A} \wedge (\vec{B} + \vec{C}) &= \vec{A} \wedge \vec{B} + \vec{A} \wedge \vec{C} \\ k \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B}) &= k \cdot \vec{A} \wedge \vec{B} = \vec{A} \wedge k \cdot \vec{B} \end{aligned}$$

Calcul en coordonnées :

Soient 2 vecteurs A et B dont on veut calculer le produit vectoriel en fonction des coordonnées :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} X_B \\ Y_B \\ Z_B \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{A} \wedge \vec{B} = \begin{vmatrix} X_A & X_B \\ Y_A & Y_B \\ Z_A & Z_B \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A \\ Z_A \cdot X_B - Z_B \cdot X_A \\ X_A \cdot Y_B - X_B \cdot Y_A \end{pmatrix}$$

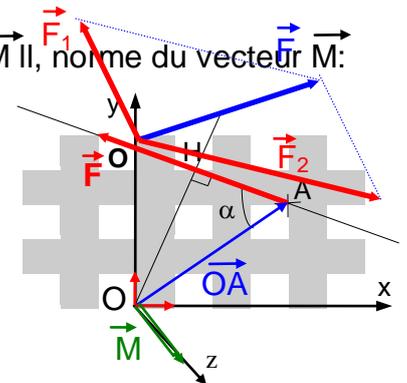
Pour obtenir la coordonnée « $Y_A \cdot Z_B - Y_B \cdot Z_A$ » sur x, on supprime la « ligne des x », et on effectue le produit en croix des lignes suivantes comme décrit ci-dessous.



Exemple 1 :

Soit $\vec{M} = \vec{OA} \wedge \vec{F}$. Déterminer les coordonnées de \vec{M} ainsi que $M = \|\vec{M}\|$, norme du vecteur \vec{M} :

$$\vec{OA} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \vec{F} = \begin{pmatrix} -5 \\ +2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{OA} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \times 0 - 0 \times (-2) \\ 0 \times (-5) - 4 \times 0 \\ 4 \times 2 - 3 \times (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 23 \end{pmatrix}$$



Remarques :

- ✓ \vec{OA} et \vec{F} étant dans le plan (\vec{x}, \vec{y}) , \vec{M} est sur l'axe z perpendiculaire au plan (\vec{x}, \vec{y}) .
- ✓ $\|\vec{M}\| = M = OA \cdot F \cdot \sin \alpha$ avec $OA \sin \alpha = OH$ soit :
 $M = F \times OH$

Exemple 2 :

Soit $\vec{M} = \vec{AB} \wedge \vec{R}$. Déterminer les coordonnées de \vec{R} ainsi que $R = \|\vec{R}\|$, norme du vecteur \vec{R} :

$$\text{avec : } \vec{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{R} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \quad \text{alors, } \vec{AB} \wedge \vec{R} = \begin{vmatrix} -3 & -6 \\ 2 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times (-4) - (-2) \times 4 \\ (-2) \times (-6) - (-3) \times (-4) \\ -3 \times 4 - 2 \times (-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 + 8 \\ 12 - 12 \\ -12 + 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Donc, $\vec{M} = \vec{0}$. Il fallait remarquer que \vec{R} et \vec{AB} sont parallèles ($\vec{R} = 2 \cdot \vec{AB}$)