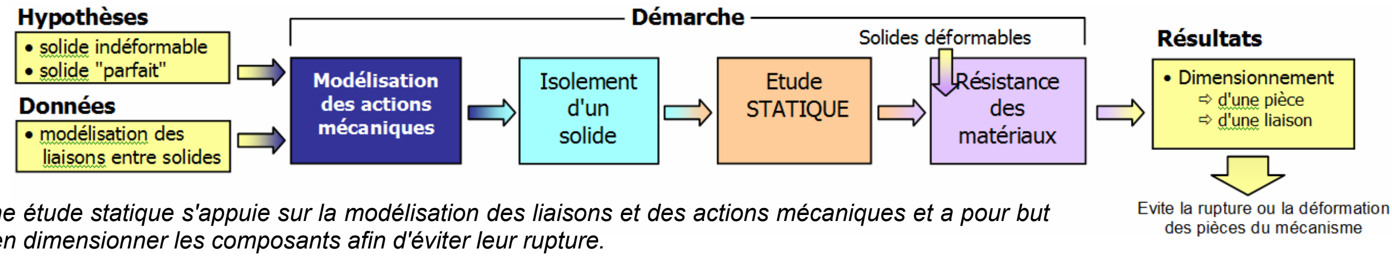
1. INTRODUCTION

La mécanique, rappelons-le, est la science des lois de **l'équilibre** et du **mouvement** des **solides**.
L'équilibre ou le mouvement d'un solide dépend des actions mécaniques (abusivement appelées "forces") qui lui sont appliquées. Si l'étude des mouvements (CINEMATIQUE) est indépendante des actions mécaniques qui les provoquent, l'étude de l'équilibre (STATIQUE) en impose une modélisation rigoureuse.

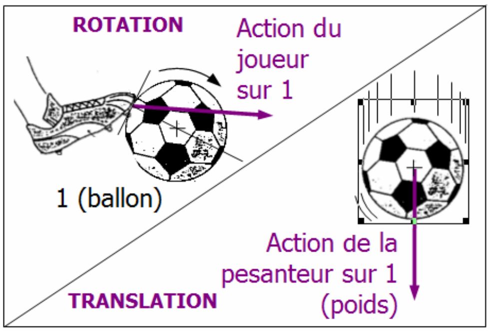


Une étude statique s'appuie sur la modélisation des liaisons et des actions mécaniques et a pour but d'en dimensionner les composants afin d'éviter leur rupture.

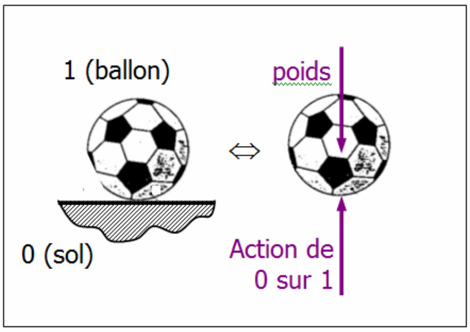
2. NOTION D'ACTION MECANIQUE

On appelle **action mécanique** toute cause capable, par contact ou à distance, de :

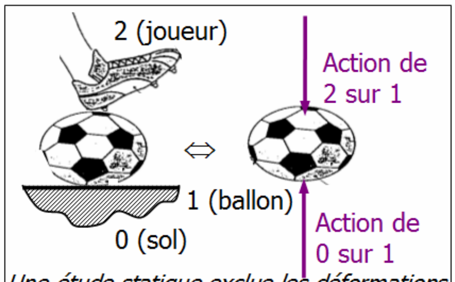
Créer un mouvement



Maintenir un corps en équilibre



Déformer un corps

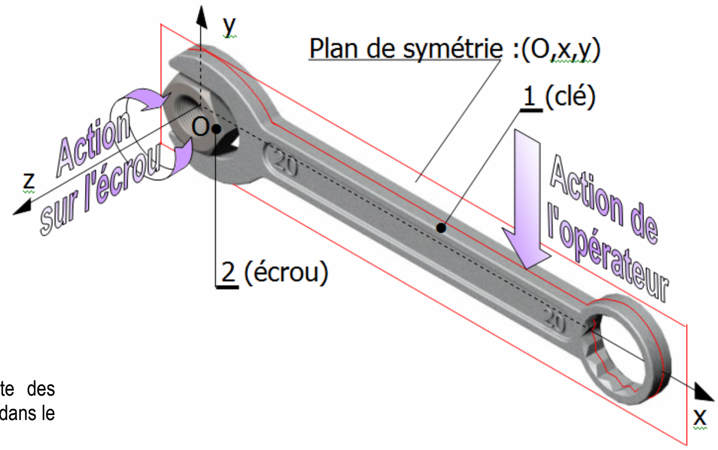


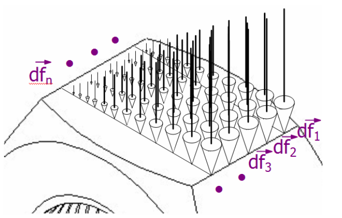
Une étude statique exclue les déformations (hypothèse de solides indéformables)

La translation est créée - ou supprimée (équilibre) - par l'action mécanique appelée RESULTANTE.
La rotation est créée - ou supprimée (équilibre) - par l'action mécanique appelée MOMENT.

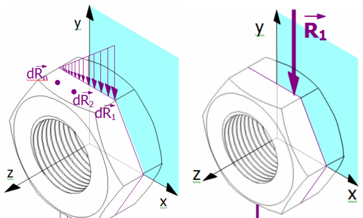
3. NOTION DE RESULTANTE - ETUDE DE CAS

Une action mécanique peut toujours être modélisée par une vecteur. On souhaite ici, modéliser l'action de contact exercée par la clé sur l'écrou.





L'action de la clé sur l'écrou peut être modélisée par un ensemble de "forces élémentaires" (notées $\vec{df_i}$) réparties sur la surface de contact.



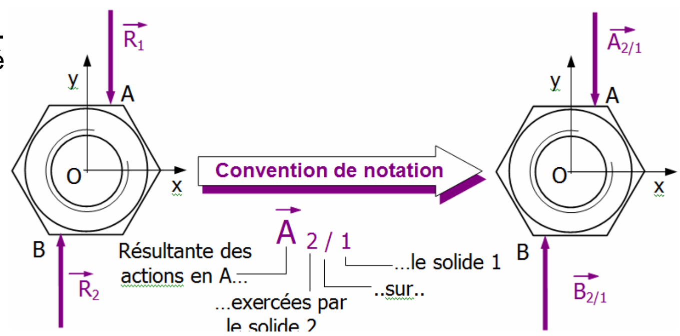
On peut enfin, déterminer la résultante des forces dR_i. Elle est notée $\vec{R_i}$ et est contenue dans le plan de symétrie $(\vec{x}, \vec{y})$.

Rq - Problème plan : lorsque la géométrie du mécanisme **et** des actions mécaniques admettent un plan de symétrie, alors, toute l'étude est ramenée dans ce plan. La vue 3D n'est plus nécessaire et une vue 2D du plan considéré suffit et simplifie l'étude.

Conclusion :
Une action mécanique s'exerce soit par contact, soit à distance. Dans les 2 cas, l'action est modélisée par un vecteur appelé RESULTANTE et notée comme indiqué ci-contre.

Ce qu'on appelle une "force" est en fait, la résultante en un point de plusieurs actions élémentaires réparties :

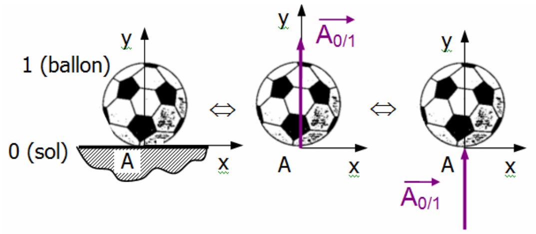
- sur une surface pour une action de contact
- dans un volume pour une action à distance
  (même démarche – résultat § 4.2.)



4. RESULTANTE : PROPRIETES

Il y a 2 types d'action mécanique : de contact ou à distance.

4.1. Résultante d'actions mécaniques de contact



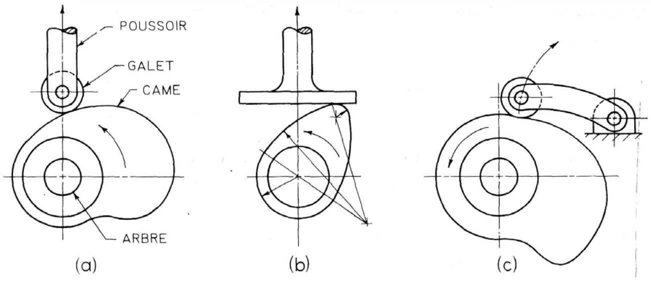
Contact entre deux solides (action de liaison)

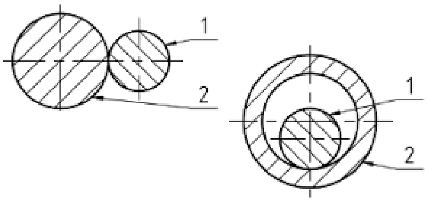
• propriétés graphiques

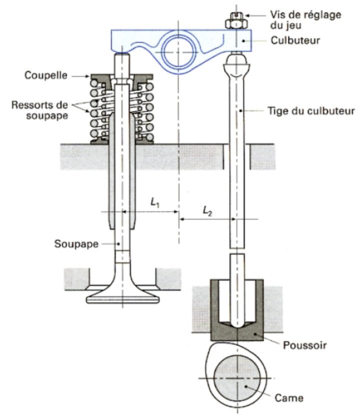
$\overrightarrow{A_{0/1}}$ =
- direction : toujours ⊥ au contact, ici :(A,y)
- sens : de 0 vers 1
- norme : $\|\overrightarrow{A_{0/1}}\|$ ici, 6,9 N
- point d'application : A

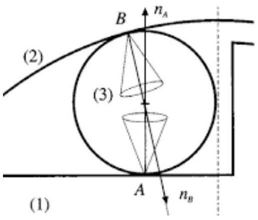
• propriétés analytiques

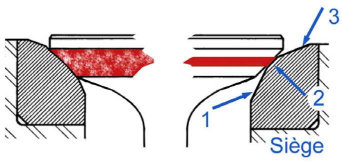
$$\overrightarrow{A_{0/1}} = \left|\begin{matrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{matrix}\right. = \left|\begin{matrix} 0 \\ +6{,}9\ N \\ 0 \end{matrix}\right.$$

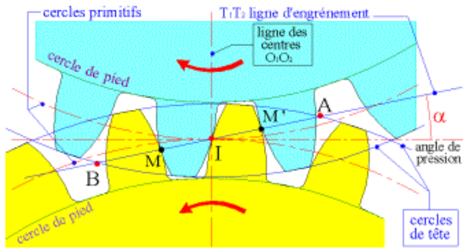






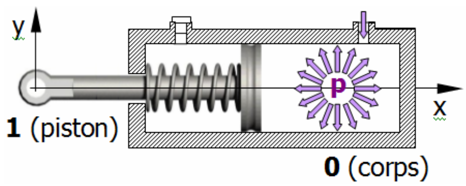






Contact entre un solide et un fluide

$\overrightarrow{F_{fluide/1}}$ =
- direction : toujours ⊥ au contact, ici :(A,$\vec{x}$)
- sens : du fluide (2) vers le piston (1)
- norme : $\|\overrightarrow{F_{fluide/1}}\| = p\ .\ S$ (en Newton)
- point d'application : centre de gravité de la surface, ici : A

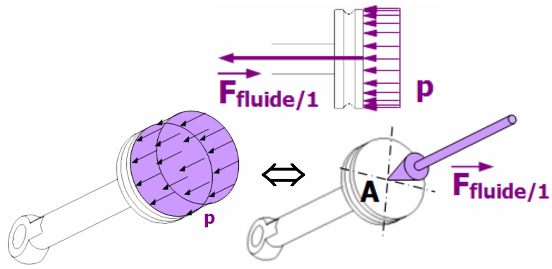


$$\boxed{F_{fluide/1} = p\ .\ S}$$

Unités de pression

1 Pa = 1 N/m²
1 MPa (Méga Pascal) = 10^6 Pa = 1 N/mm²
1 bar = 10^5 Pa

p : pression en Pa
S : surface en m^2
F : effort de pression en N

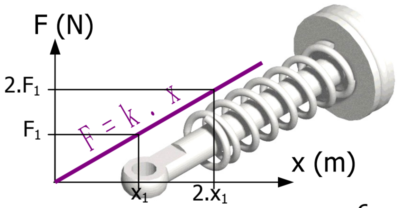


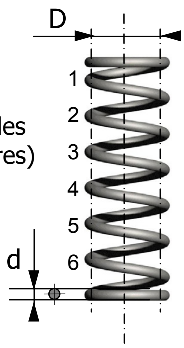
Cas particulier : ressort

Prenons l'exemple du ressort de rappel du vérin précédent :

$$\boxed{F_{ressort/1} = k\ .\ x}$$

k : raideur en N/m
x : flèche en m
F : effort du ressort en N

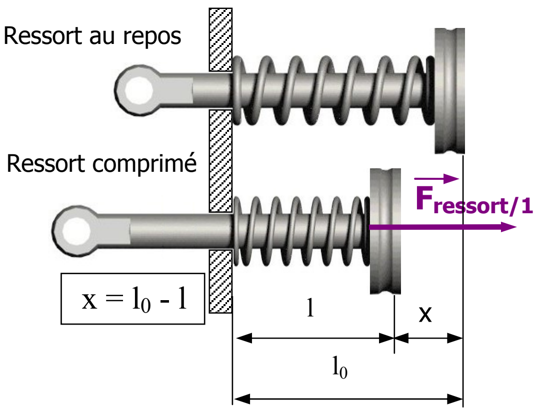




n = 6
spires utiles
(ou entières)

Calcul de la raideur k

$K = \dfrac{G\ .\ d^4}{8\ .\ n\ .\ D^3}$	**avec**	G = 80.000 N/mm^2 d : diamètre du fil D : diamètre d'enroulement n : nombre de spires



($\overrightarrow{F_{ressort/1}}$ a pour support l'axe du ressort)

4.2. Résultante d'actions mécaniques à distance

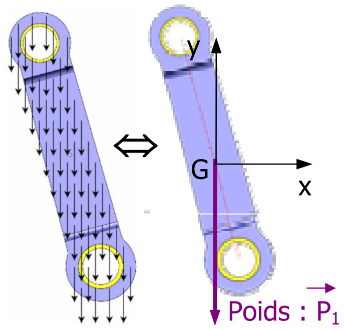
Attraction terrestre (pesanteur) ⇨ poids du solide

$$\boxed{\| \vec{P} \| = P = m \cdot g}$$

(N) (kg) $9{,}81\ m.s^{-2}$

masse de la bielle 1 :
$m_1 = 0{,}7$ kg

Poids de la bielle 1
$P_1 = m_1 . g = 0{,}7 \times 9{,}81$
$\approx 6{,}9$ N



- propriétés graphiques

$\vec{P_1}$ =
- support : toujours vertical, ici : $(G,\vec{y})$
- sens : toujours vers le bas
- norme : $\| \vec{P_1} \| = P_1 = m_1 .g$, ici : 6,9 N
- point d'app. : G, centre de gravité

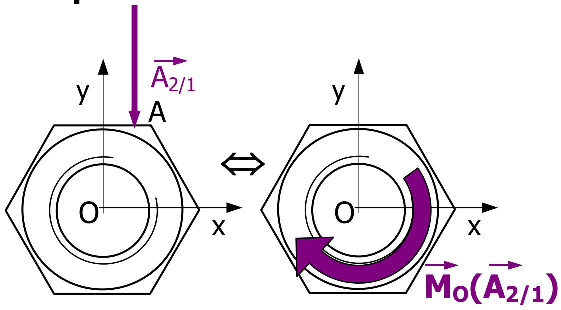
- propriétés analytiques

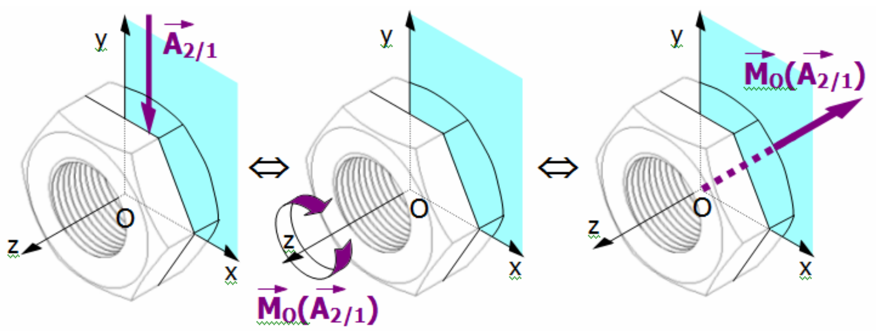
$$\vec{P_1} = \begin{vmatrix} 0 \\ -m_1 . g \\ 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 \\ -6{,}9\ N \\ 0 \end{vmatrix}$$

Attraction magnétique, électromagnétique ...

5. MOMENT D'UNE FORCE : ETUDE DE CAS

La notion de Moment est indissociable de la force qui le provoque.
Le moment d'une force est toujours défini en un point.
Reconsidérons le cas du serrage d'un écrou, abstraction faite de $\vec{B_{2/1}}$:





La force $\vec{A_{2/1}}$ induit un moment en O et provoque donc la rotation de l'écrou autour de l'axe $(O,\vec{z})$. Le "moment en O de la force $\vec{A_{2/1}}$" est noté:

$$\vec{M_O}(\vec{A_{2/1}})$$

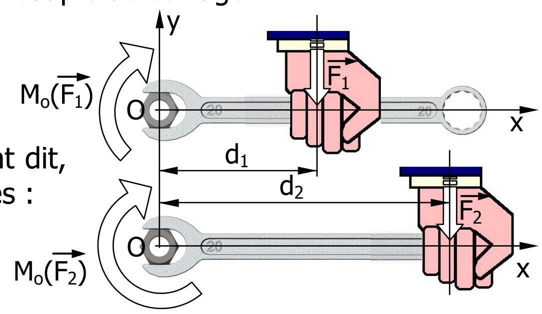
C'est également un vecteur, porté par l'axe de la rotation qu'il provoque. Il se mesure en Newton-mètre (N.m)

Le "couple" est un cas particulier du moment comme ici, où ou parle de "couple de serrage".

6. MOMENT D'UNE FORCE : PROPRIETES

6.1. Mise en évidence du phénomène :

A la distance d_1, l'opérateur ne parvient pas à serrer l'écrou . Autrement dit, le Moment en O de l'effort $\vec{F_1}$ n'est pas suffisant. Deux solutions possibles :
- ⇨ augmenter l'effort $\vec{F_1}$
- ⇨ augmenter la distance d_1

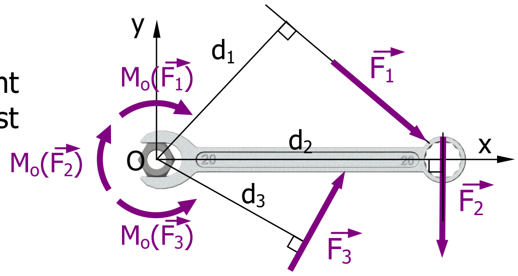


Le moment de la force $\vec{F_1}$ en O est donc proportionnel :
- ⇨ à l'intensité de la force : $\| \vec{F_1} \|$
- ⇨ à la distance appelée "bras de levier" : d_1

Rq : Le bras de levier est la distance mesurée du point O **perpendiculairement** au support de la force.

6.2. Moment scalaire :

Le moment scalaire est la plus simple expression du moment puisqu'il représente, au signe prés, sa norme en Newton-mètre. Il est utilisé dans les cas simples (problème "plan", bras de levier évident).



$$\boxed{M_o(\vec{F}) = \pm\ F \cdot d}$$

(N.m) (N) (m)

avec :
- $\vec{F} \perp d$
- $F = \| \vec{F} \|$
- signe : ✓ sens trigo. (+)
  ✓ sens horaire (-)

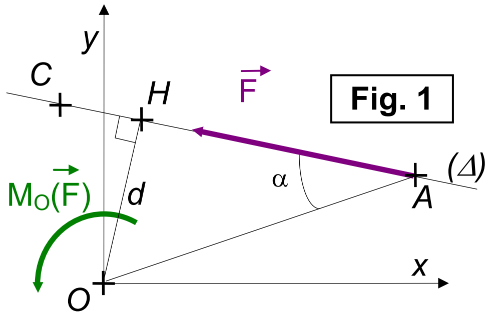
exemples :
- $M_o(\vec{F_1}) < 0$
- $M_o(\vec{F_2}) < 0$
- $M_o(\vec{F_3}) > 0$

$$M_o(\vec{F}) = \pm \| \vec{M_o}(\vec{F}) \|$$

Si $F_1 = F_2 = F_3$ et $d_2 > d_1 > d_3$
alors : $M_o(\vec{F_2}) > M_o(\vec{F_1}) > M_o(\vec{F_3})$

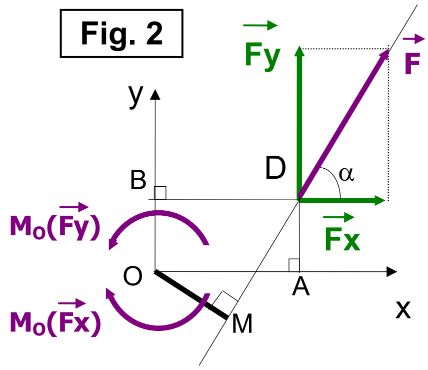
Cas du moment scalaire nul (fig. 1) :

- $M_A(\vec{F}) = M_H(\vec{F}) = M_C(\vec{F})$ **= 0** car dans les trois cas, la distance d est nulle ;
- Cela traduit le fait que la force $\vec{F}$ ne peut créer aucun mouvement de rotation autour de ces points mais peut simplement les faire translater le long du support (Δ).



propriété (fig. 2) :

- si $\vec{F} = \vec{Fx} + \vec{Fy}$, alors : $\boxed{M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{Fx}) + M_O(\vec{Fy})}$
- ici, $M_O(\vec{F}) = + F.OM = + Fy . OA - Fx . OB$



Exercice (fig. 2) :

- Données : F = 40 N, α = 70°, D (30, 15)
- Déterminer : **1.** Fx et Fy — **2.** les coordonnées de $\vec{F}$ — **3.** $M_O(\vec{F})$ — **4.** la distance OM

$Fx = F.\cos\alpha = 40 \times \cos 70° = 13.7$ N

$Fy = F.\sin\alpha = 40 \times \sin 70° = 37.6$ N

$$\vec{F} = \left|\begin{array}{l}13.7\\37.6\\0\end{array}\right.$$

$M_O(\vec{F}) = M_O(\vec{Fx}) + M_O(\vec{Fy}) = + Fy . OA - Fx . OB = 37.6 \times 30 - 13.7 \times 15 = 922.4$ Nmm

$M_O(\vec{F}) = F \times OM \leftarrow OM = M_O(\vec{F}) / F = 922.4 / 40 = 23.06$ mm

6.3. Vecteur moment :

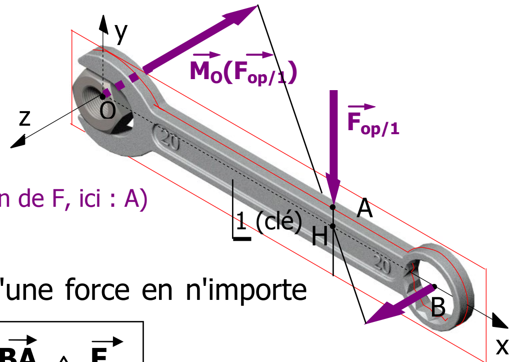
Le calcul du vecteur moment permet de déterminer n'importe quel moment de n'importe quelle force dans le plan ou dans l'espace et ce, avec précision et à coup sûr. Il nécessite simplement la connaissance :

- des coordonnées des points (en m)
- des coordonnées des forces (en N)

Le « vecteur moment au point O de la force F appliquée en A » est défini tel que :

$$\boxed{\overrightarrow{M_O(\vec{F})} = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{F}}$$

Point sur le support de F (en général, point d'application de F, ici : A)



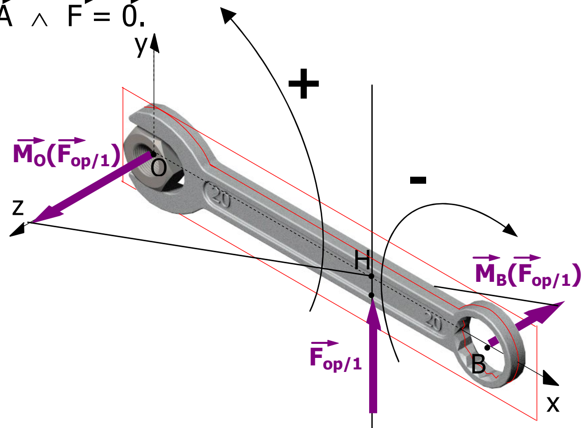
Pour les besoins de l'étude, on peut être amené à calculer le moment d'une force en n'importe quel point de l'espace ! Ainsi, on définirait de même :

$$\boxed{\overrightarrow{M_B(\vec{F})} = \overrightarrow{BA} \wedge \vec{F}}$$

remarque - vecteur moment nul (fig. 1):

$\overrightarrow{M_C(\vec{F})} = \overrightarrow{CA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$ quelque soit le point C appartenant au support (Δ) de $\vec{F}$. En effet, $\vec{F}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont colinéaires. Notamment pour le point d'application de $\vec{F}$: $\overrightarrow{M_A(\vec{F})} = \overrightarrow{AA} \wedge \vec{F} = \vec{0}$.

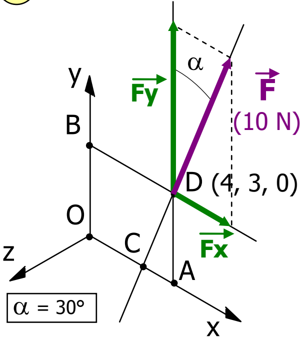
Le moment d'une force en un point de son support est toujours nul.



remarque – sens du vecteur moment :

Le sens du vecteur moment est cohérent avec la convention de signe du moment scalaire : ci-contre $M_O(\vec{F}_{op/1}) > 0$ et $M_B(\vec{F}_{op/1}) < 0$

vecteur moment - exemples :



Déterminer $\overrightarrow{M_O(F)}$, $\overrightarrow{M_A(F)}$, $\overrightarrow{M_B(F)}$ et $\overrightarrow{M_C(F)}$

- $\overrightarrow{M_O(F)} = \overrightarrow{OD} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l}4\\3\\0\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}10/2\\10\sqrt{3}/2\\0\end{array}\right. \approx \left|\begin{array}{l}0\\0\\20{,}64\end{array}\right.$
- $\overrightarrow{M_A(F)} = \overrightarrow{AD} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l}0\\3\\0\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}10/2\\10\sqrt{3}/2\\0\end{array}\right. \approx \left|\begin{array}{l}0\\0\\-15\end{array}\right.$
- $\overrightarrow{M_C(F)} = \overrightarrow{BD} \wedge \vec{F} = \vec{0}$
- $\overrightarrow{M_B(F)} = \overrightarrow{BD} \wedge \vec{F} = \left|\begin{array}{l}4\\0\\0\end{array}\right. \wedge \left|\begin{array}{l}10/2\\10\sqrt{3}/2\\0\end{array}\right. \approx \left|\begin{array}{l}0\\0\\34{,}64\end{array}\right.$